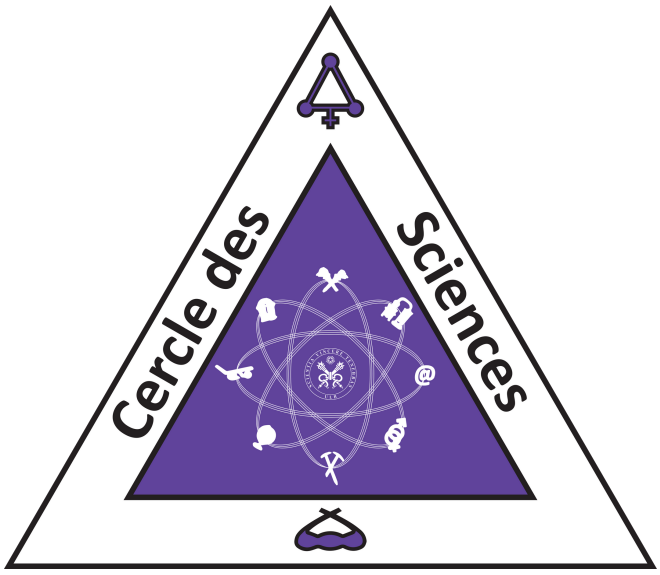
Cercle des Sciences

Année académique 2022-2023

Recueil d'examens

Chimie



UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Introduction

Heyy futur.e.s chimiste ! Moi c'est Carole, je suis la fière représente de la Chimie pour cette année dans la meilleure team aka la Team SectionS. Tu trouveras ici une compilation d'examens corrigés depuis plusieurs années. Mais attention, les examens sont corrigés par la team SectionS, il se pourrait donc qu'il y ai de petites erreurs, soit donc vigilant.e.s ! Tu peux aussi trouver des descriptions de cours et des trucs et astuces pour réussir ton année, et haut la main en plus ! Si tu as des questions, tu peux contacter lea représentant.e. de ta section pour qu'iel y réponde au mieux. Nous somme là pour ça!! Tant que tu es encore là à me lire, je te donne mon premier conseil : "Passe les interrogations de novembre!!!!!!"Celle-ci peuvent vraiment t'apporter beaucoup, car elles sont moins compliquée que les examen de janvier et tu peux avoir un point bonus ou encore voir ta note augmenter si celle de novembre est plus haute que celle janvier. Mais pas de panique, ce n'est que pour t'aider, dans le cas où tu réussi mieux l'examen de janvier ta note restera inchangée. Ce n'est donc que du BONUS!! Et enfin, je te conseille de faire des examen d'année précédentes pour te préparer au mieux au tien, car ils sont toujours plus difficile que les séances d'exercices. Courage, si tu travailles suffisamment je suis sur que tu y arrivera :)

Carole Dewilde, cooptée Chimie

Table des matières

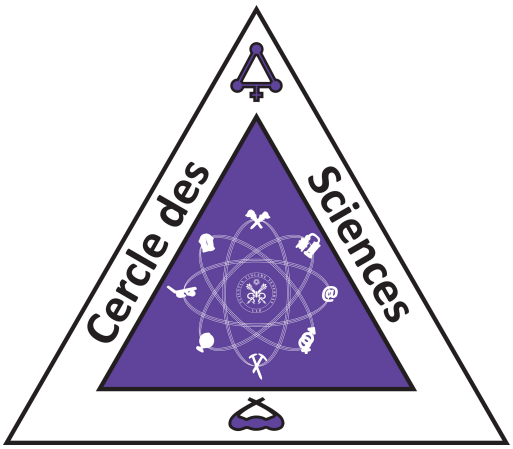
Chim-f101 ..... p4

Math-f112 + f115 ..... p227

Chim-f102 ..... p355

Phys-f110 ..... p356

Biol-f102 ..... p555



Chim-f101

Le cours de chimie F101 est un cours commun à la quasi totalité des BA1 de la faculté des sciences. Cependant, celui-ci est divisé en plusieurs parties, dont les chimistes (entre autre) iront le plus loins. Ce cours repassera sur les sujets vu dans le secondaire tout en allant plus loins dans la matière. Ensuite, le professeur abordera de la nouvelle matière, celle-ci étant souvent considérée comme la plus difficile. Vous n'avez cependant pas trop de craintes a avoir si vous travaillez de manière adéquate et suffisante. Je vous conseille de suivre assidûment les séminaires tout au long de l'année et d'y être très attentif. Souvent, l'assistant.e.s fait un résumé de la théorie attachée aux exercices avant de s'y consacrer. Pour les examens, au Q1 ils sont constitués d'une partie théorique à cours fermé et d'une partie exercices à cours ouvert. Je vous conseille de faire attention, car même si vous aurez votre cours avec vous, vous n'aurez le temps que de n'en faire qu'une simple aide. Au Q2 vous aurez de nouveau une épreuve écrite pour les exercices, mais la théorie sera cette fois sous forme d'examen oral. (Les questions les plus fréquentes seront mises ci dessous) Mais attention, n'oubliez pas les travaux personnel et l'interrogation de fin octobre/ début novembre! Ceux-ci peuvent vous aider fortement à réussir en vous apportant des points mais surtout ne vous en fera pas perdre di celle-ci est moins bien réussie que l'examen de janvier. C'est donc votre meilleure occasion pour vous confronter à une épreuve d'université qui n'ai que de bonnes conséquences.

Questionnaire n°400

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2014/2015

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 5 janvier 2015

Première partie - Théorie

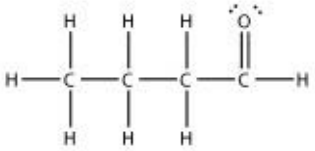
NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

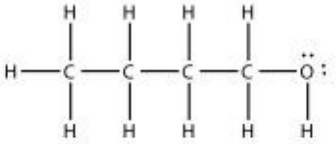
QUESTION 1 *(15 points).*

Considérez trois corps purs :

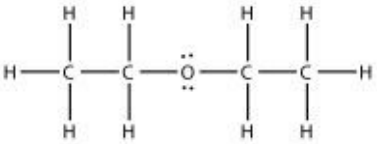
- le butanal (CH_3-CH_2-CH_2-CHO)



- le butan-1-ol (CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-OH)



- l'éthoxyéthane (CH_3-CH_2-O-CH_2-CH_3)



a) Classez ces composés dans l'ordre croissant de leur température d'ébullition.

b) Justifiez ce choix sur base des interactions existant entre les molécules de ces composés.

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

- Définissez le terme « adiabatique ».

- Expliquez comment évoluera la vitesse moyenne des particules d'un gaz si l'on augmente le volume de manière adiabatique.

- Quel sera l'effet de cette opération sur la température du gaz ?

Considérez la détente isotherme d'un gaz.

- Existe-t-il un transfert de chaleur entre l'environnement et le système ? Justifiez.

- La vitesse moyenne des molécules est-elle modifiée ? Justifiez.

Considérez la détente isotherme de deux récipients de volume identique. L'un contient de l'argon et l'autre du diazote. Existe-t-il une éventuelle variation de l'entropie de l'environnement suite à l'opération ? Si oui, pour quel récipient cette variation serait-elle la plus forte et quel serait le signe de celle-ci ? Justifiez votre réponse.

Deux récipients de 2,241 L sont portés à la température de 0°C. L'un contient 1,000 mol d'argon et l'autre 1,000 mol d'ammoniac.

- Expliquez à quel gaz l'équation d'état des gaz parfaits s'applique le mieux.

- Pour quel récipient la pression mesurée est-elle la plus élevée ? Justifiez et estimez la valeur de celle-ci (sans machine).

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Face à l'évolution des cours et des réserves de pétrole, certains acteurs de la pétrochimie ont développé des unités de production de carburant liquide synthétisé à partir d'un mélange de $CO(g) + H_2(g)$ en présence d'un catalyseur.

1) Ecrivez l'équation chimique équilibrée de la réaction qui produit de l'octane (C_8H_{18}) et de la vapeur d'eau.
2) Prédisez le signe de la variation d'entropie de la réaction. Justifiez.
3) La réaction étant spontanée dans les conditions de la synthèse, quelle conclusion pouvez-vous tirer sur le signe de $\Delta_r H$? Justifiez votre réponse.
4) Existe-t-il une température d'inversion pour cette réaction ? Justifiez.

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(10 points)*

Soit la configuration électronique complète d'une molécule à l'état fondamental :

$$(\sigma_{1s})^2\,(\sigma_{1s}^*)^2\,(\sigma_{2s})^2\,(\sigma_{2s}^*)^2\,(\pi_{2p})^2\,(\pi_{2p})^2\,(\sigma_{2p})^2\,(\pi_{2p}^*)^1$$

a) A quelle molécule – CO, O_2, N_2, NO ou F_2 – correspond-elle ?
b) Comparez les longueurs de liaison de cette molécule avec celles de son cation monovalent et justifiez votre réponse.
c) Cette molécule est-elle para- ou diamagnétique? Expliquez.

(Les symboles des éléments de la deuxième période sont dans l'ordre Li, Be, B, C, N, O, F, Ne.)

Questionnaire n°400

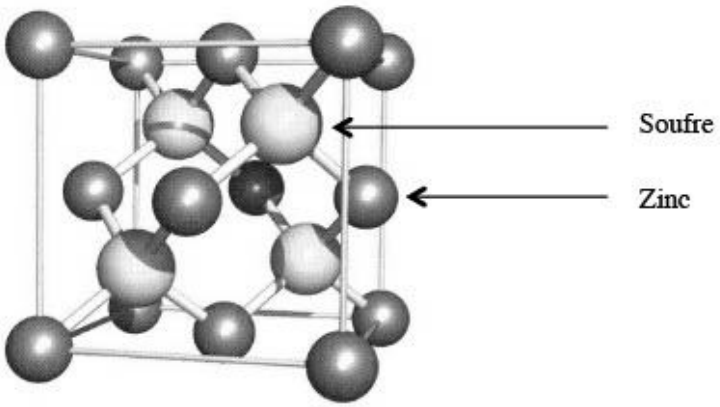
Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(15 points)*

La figure ci-dessous représente la maille cristalline d'un minéral constitué d'atomes de zinc et de soufre.



a) Sur base d'un décompte d'atomes, identifiez la formule brute de ce composé.

b) Le soufre et le zinc appartiennent à la 3ème et à la 4ème période, respectivement. Expliquez pourquoi on a représenté les atomes de soufre plus volumineux que les atomes de zinc.

Questionnaire n°400

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2014/2015

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 5 janvier 2015

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points). La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

L'alliage Sn/Pb est souvent utilisé en soudure car ce mélange fond à basse température (183°C). Quand 5,00 g de cet alliage sont plongés dans une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène en excès, un gaz se dégage et il y a apparition d'un précipité blanc de masse 2,55 g.
Les états d'oxydation des deux métaux sont de +2 en fin de réaction.

a) Ecrivez les équations ioniques nettes des processus chimiques observés lorsque l'alliage est plongé dans la solution de chlorure d'hydrogène.
b) Quelle est la fraction massique de l'étain dans cet alliage ?
c) Quel est le volume du gaz dégagé à température et pression normales ?

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

La vélocité d'un électron éjecté d'une surface métallique par un photon est de $6{,}201.10^{2}$ km/s.

a) Quelle est la longueur d'onde associée au mouvement de l'électron éjecté ?

b) Que vaut le travail d'extraction si la fréquence du rayonnement pour éjecter un électron est de $1{,}100.10^{15}$ Hz ?

c) Dans quelle partie du spectre électromagnétique se situe l'énergie utilisée pour arracher l'électron ?

d) Quelle est l'incertitude minimale sur la position de l'électron sachant que sa vitesse est connue à ± 0,1 km/s ?

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(25 points)*

L'indium est un métal gris brillant à bas point de fusion (156 °C). Sa récente utilisation massive, notamment dans les écrans plats, a fait passer son prix de 80 €/kg à 800 €/kg entre 2001 et 2005. La pénurie actuelle en fait une matière première minérale d'un enjeu socio-économique majeur.
Un industriel veut faire fondre 1,000 kg d'indium pur pour en faire un lingot. Pour cela, il utilise un dispositif qui permet la combustion complète d'un mélange gazeux de méthane et d'éthane. À la fin de la réaction, 5,342 g de dioxyde de carbone et d'eau (liquide) ont été produits. La température initiale de l'indium est de 25°C ; son enthalpie de fusion est de 3,270 $kJ.mol^{-1}$ et sa capacité calorifique est de 26,75 $J.mol^{-1}.K^{-1}$.

a) Ecrivez les réactions de combustion des deux gaz.

b) Quel volume du mélange de gaz à 25 °C sous 1,000 atm est nécessaire pour réaliser cette opération ?

(*Considérez l'absence de toute perte calorifique et la capacité calorifique constante dans la plage de température mentionnée. Négligez la variation de l'enthalpie molaire de réaction avec la température.*)

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(25 points)*

Une expérience de diffraction des rayons X ($\lambda = 0{,}1541$ nm) d'un cristal donne un angle de diffraction de premier ordre de 29,32° pour le plan (002). La substance a une masse volumique de 10,22 g/cm^3 et ses atomes adoptent une structure cristalline de type cubique centré.

a) Représentez en trois dimensions une maille élémentaire du cristal et indiquez-y les axes et le plan (002).

Au moyen des données, répondez aux questions suivantes :

b) Quelle est la masse molaire de cet élément ?
c) Combien d'atomes un plan (001) d'une surface de 1,000 cm^2 traverse-t-il ?

Questionnaire n°001

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2014/2015

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

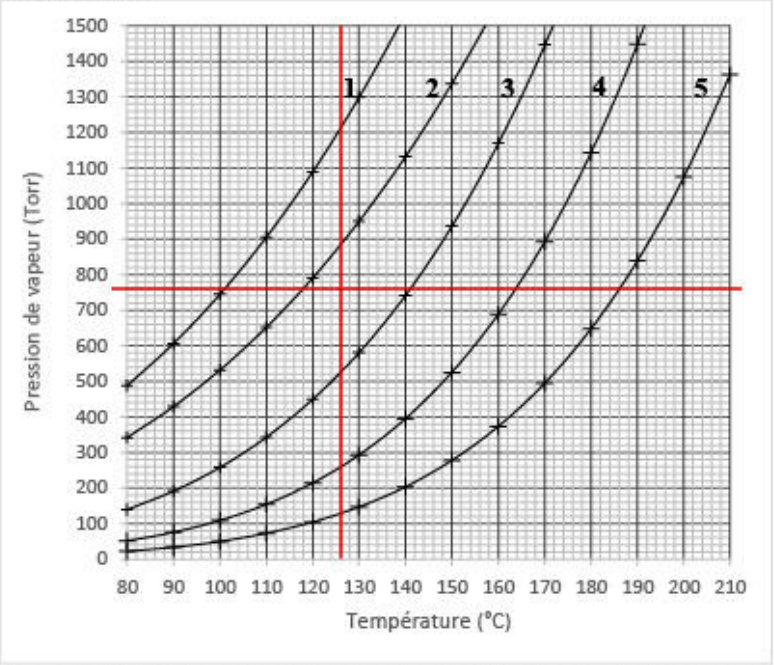
EXAMEN DE CHIMIE du 26 mai 2015

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(20 points). Une feuille supplémentaire est fournie pour répondre à cette question*

Les pressions de vapeur de différents acides carboxyliques ont été mesurées en fonction de la température :



1) HCOOH
2) CH_3COOH
3) CH_3CH_2COOH
4) $CH_3(CH_2)_2COOH$
5) $CH_3(CH_2)_3COOH$

a) Complétez le tableau ci-dessous. Détaillez vos calculs sur la feuille supplémentaire fournie.

	Acide propanoïque	Acide pentanoïque
Formule chimique	CH_3CH_2COOH	$CH_3(CH_2)_3COOH$
$T_{ébul}$ (°C) (à P atmosphérique)	141	186
ΔH^0_{vap} (kJ/mol)	33.8	45.9

b) À 126°C, l'acide propanoïque et l'acide pentanoïque forment un mélange idéal. On considère un mélange au-dessus duquel la pression totale au-dessus du mélange est égale à 330 Torr. Calculer les fractions molaires des deux acides dans la phase liquide et la phase gazeuse.

c) Dessinez, en utilisant les valeurs calculées, l'isotherme du mélange à 126 °C sur le graphique situé au bas de la feuille fournie.

Questionnaire n°001

NOM, Prénom: ..... _____

.....

Section et numéro de matricule : 1

a) Exemple de données sur le graphique

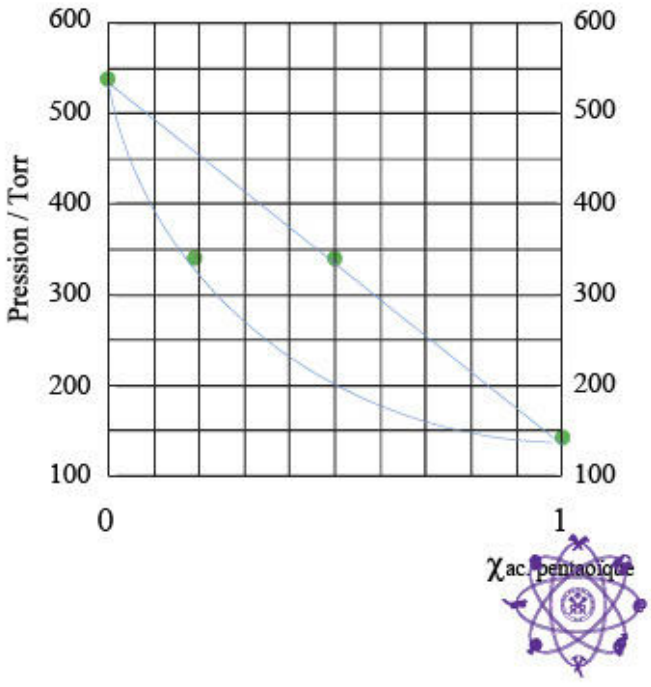
	T/°C	T/K	P/Torr
Acide propanoïque	170 100	443,15 373,15	1450 260
Acide pentanoïque	210 120	483,15 393,15	1360 100

Acide propanoïque : $\Delta H^0_{vap} = +\ 33{,}8$ kJ.mol^{-1}
Acide pentanoïque : $\Delta H^0_{vap} = +\ 45{,}8$ kJ.mol^{-1}

b) Acide propanoïque seul : $P^0_{126°C} = 530$ Torr
Acide pentanoïque seul : $P^0_{126°C} = 130$ Torr

c)

$\chi^L_{Ac.propanoïque} = \frac{200}{400} = 0{,}500 \rightarrow \chi^L_{Ac.pentanoïque} = 1 - 0{,}500 = 0{,}500$
$\chi^V_{Ac.propanoïque} = \frac{0{,}500.530}{330} = 0{,}803 \rightarrow \chi^V_{Ac.pentanoïque} = 1 - 0{,}0803 = 0{,}197$



Questionnaire n°001

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 26 mai 2015

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

a) Des ions sulfures sont progressivement ajoutés à une solution contenant des ions cadmium, ferreux et ferrique. La concentration de chaque ion est égale à 10^{-6} mol.L^{-1}. Déterminez et justifiez la séquence d'apparition des précipités.

b) Calculez la solubilité du sulfure de cadmium dans une solution aqueuse saturée de H_2S à 0,1 mol.L^{-1} ajustée à pH = 2,0 à 25°C.

a)

La séquence d'apparition des précipités suit l'ordre croissant des concentrations en ions sulfures calculées :

$Fe_2S_3(s)$ puis CdS(s) puis FeS(s)
1 2 3

b)

$[Cd^{2+}] = 1{,}4.10^{-13}$ mol.L^{-1}

a) $S^{2-} + Fe^{3+} \rightleftharpoons Fe_2S_3(s)$; $K_S = \frac{1}{[Fe^{3+}][S^{2-}]}$ $\Leftrightarrow$ $[S^{2-}] = \frac{1}{[Fe^{3+}]K_S} = 1.10^{91}$

Pareil pour CdS : $[S^{2-}] = 7{,}14\ 10^{34}$
FeS : $[S^{2-}] = 6{,}29.10^{24}$

} Celui qui a besoin d'une concentration plus petite précipite d'abord.

Questionnaire n°001

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 26 mai 2015

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Soit la pile à 298K :

Fe (s)	Fe^{3+} (aq) = 0,600 mol.L^{-1}; V= 1,00 L	$[CuCl_4]^{2-}$ (aq) = 0,600 mol.L^{-1} $[CuCl_2]^-$ (aq) = 0,300 mol.L^{-1} Cl^- (aq) = 3,00 mol.L^{-1}; V= 1,00 L	Pt (s)

a) Ecrivez les équations des demi-réactions qui se produisent à la cathode et à l'anode, ainsi que l'équation de la réaction globale.

b) A l'aide des constantes de complexation des ions Cu(I) et Cu(II) et de la table des potentiels standard en solution aqueuse acide, calculez le potentiel standard de la cathode.

c) Calculez la force électromotrice de cette pile.

d) Quelle masse fer sera déposée sur l'électrode de fer si ce système est soumis à une électrolyse opérée avec un courant de 3,00 A pendant 90,0 minutes ? Que vaudra la force électromotrice après l'électrolyse ?

a)

anode : $Fe(s) \rightleftharpoons Fe^{3+}(aq) + 3\ e^-$

cathode : $[CuCl_4]^{2-}(aq) + 1\ e^- \rightleftharpoons [CuCl_2]^-(aq) + 2\ Cl^-(aq)$

équation globale : $Fe(s) + 3\ [CuCl_4]^{2-}(aq) \rightleftharpoons Fe^{3+}(aq) + 3\ [CuCl_2]^-(aq) + 6\ Cl^-(aq)$

b) $\rightarrow E° = 0{,}726V$

c) $E_{pile} = E_{cathode} - E_{anode} = +0{,}729\ V$

d) $\Delta E = +0{,}763\ V$

Questionnaire n°001

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 26 mai 2015

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

a) On dispose de deux solutions aqueuses :
- de l'acide maléique HOOC-CH=CH-COOH à 0,300 mol.L^{-1}
- de l'hydroxyde de sodium à 0,200 mol.L^{-1}. Calculez le pH du deuxième point d'équivalence du titrage de 20,0 mL de la solution acide par la base forte. Écrivez les deux équations de neutralisation de ce diacide. Mentionnez un indicateur approprié.

b) On dispose des deux solutions suivantes :
- une solution aqueuse de maléate de sodium à 0,100 mol.L^{-1}
- une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène à 0,100 mol.L^{-1}.

Quels volumes des deux solutions faut-il mélanger pour obtenir 1,00 litre d'une solution tampon de pH égal à 6,00. Ecrivez la réaction chimique qui se produit lors du mélange.

c) Quel sera le pH après avoir rajouté à la solution tampon 1,00 litre de solution de NaCl à 0,100 mol.L^{-1} ?

posons HOOC-CH = CH-COOH(aq) = H_2A(aq)

a)

→ pOH = 4,529 pH= 9,47

b)

→ Acide chlorhydrique : 0,350L
→ Maléate de sodium : 0, 650L

c) Le NaCl (aq) n'a aucune activité acido-basique. On dilue un mélange tampon, ce qui n'affecte pas le pH de celui-ci.

a) $HOOC-CH=CH-COOH + OH^{(-)} \rightleftharpoons HOOC-CH=CH-COO^{(-)} + H_2O$

$HOOC-CH=CH-COO^{(-)} + OH^{(-)} \rightleftharpoons {}^{(-)}OOC-CH=CH-COO^{(-)} + H_2O$

$20\,ml = 6.10^{-3}$ mol -> on a besoin 2 fois de 6.10^{-3} mol d'acide forte -> 0,03L x 2

$V_{TOT} = 0,08\,L$

$OH = \sqrt{K_{b_2} \cdot M} = \sqrt{\frac{10^{-14}}{Ka_2} \cdot \frac{6.10^{-3}}{0,08}} = 3,1 \cdot 10^{-5}$ => pOH = 4,5

b) $^{(-)}OOC-COOH + H^+ \rightleftharpoons HOOC-COOH$ (maleate simplifié)

	n_a	n_b	–
	$n_a - x$	$n_b - x$	x

n : nre de moles
V : volume

1) $V_a + V_b = 1$

$\frac{n_a}{0,100} + \frac{n_b}{0,100} = 1$

① $n_a + n_b = 0,100$

2) $pH = 6 \leftrightarrow [H^+] = 10^{-6} = n_b - x$ ②

$\frac{1}{Ka_2} = \frac{[HOOC-COOH]}{[H^+][^{(-)}OOC-COOH]}$

$Ka_2 = \frac{[H^+][^{(-)}OOC-COOH]}{[HOOC-COOH]}$

$Ka_2 = \frac{(10^{-6})(n_a - x)}{x}$

$8,57.10^{-7}\, x = 10^{-6} n_a - 10^{-6} x$

$1,857.10^{-6}\, x = 10^{-6} n_a$

$x = \frac{n_a}{1,857}$ ③

3) ③ en ②

$10^{-6} = n_b - \frac{n_a}{1,857}$

$1,857.10^{-6} = 1,857\, n_b - n_a$ ④

4) ④ et ①

$1,857.10^{-6} = 1,857\, n_b - (0,100 - n_b)$

$1,857.10^{-6} = 1,857\, n_b - 0,100 + n_b$

$0,1 = 2,857\, n_b$

$n_b = 0,035$ mol $\rightarrow V_b = \frac{n_b}{0,100} =$ **0,350 L** et $V_a = 0,650$ L

Questionnaire n°001

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 26 mai 2015

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Dans le corps humain (37°C) l'éthanol est dégradé en éthanal dans le foie par le biais d'une enzyme (alcooldéhydrogénase, ADH):

$$CH_3CH_2OH(aq) + NAD^+(aq) \xrightarrow{ADH} CH_3CHO(aq) + NADH(aq) + H^+(aq)$$

Dans son laboratoire, un scientifique étudie cette réaction en mesurant la variation du pH au cours du temps à partir d'une solution à pH = 3,00 contenant $4{,}37.10^{-2}$ mol.L^{-1} d'éthanol.

t (h)	0,0	2,00	5,50	9,00	13,0	15,0	18,0
pH	3,00	2,12	1,72	1,52	1,35	1,35	1,35

a) Déterminez graphiquement l'ordre partiel de réaction par rapport à l'éthanol ainsi que la valeur de la constante cinétique.
b) Combien de temps faut-il pour décomposer 50% d'éthanol à partir d'une solution contenant 3,00 g.L^{-1} d'éthanol.

a)

t (h)	0,0	2,00	5,50	9,00	13,0	16,5	19,0
pH	3,00	2,12	1,72	1,52	1,35	1,35	1,35
$[H^+]$	1.10^{-3}	$7{,}586.10^{-3}$	$1{,}905.10^{-2}$	$3{,}020.10^{-2}$	$4{,}467.10^{-2}$	$4{,}467.10^{-2}$	$4{,}467.10^{-2}$
$[H^+]$ formé	0	$6{,}586.10^{-3}$	$1{,}805.10^{-2}$	$2{,}920.10^{-2}$	$4{,}367.10^{-2}$	$4{,}367.10^{-2}$	$4{,}367.10^{-2}$
[EtOH]	$4{,}37.10^{-2}$	$3{,}71.10^{-2}$	$2{,}56.10^{-2}$	$1{,}45.10^{-2}$	$3{,}16.10^{-5}$	$3{,}16.10^{-5}$	$3{,}16.10^{-5}$

Ordre 0

b) $t_{1/2}$ = 10,0 heures

On trouve la constante graphiquement et le temps avec $t_{1/2} = \frac{1}{2}\frac{A_0}{k}$

MVN

Chimie : Mai 2015

①

Q2

a) $S^{2-}_{(aq)} + Cd^{2+}_{(aq)} \longrightarrow CdS_{(s)}$ $\quad \frac{1}{K_S} = \sim 10^{29} = K_1$

$S^{2-}_{(aq)} + Fe^{2+}_{(aq)} \longrightarrow FeS_{(s)}$ $\quad \frac{1}{K_S} = \sim 10^{19} = K_2$

$S^{2-}_{(aq)} + Fe^{3+}_{(aq)} \longrightarrow Fe_2S_{3(s)}$ $\quad \frac{1}{K_S} = 10^{85} = K_3$

On voit ici que le Fe_2S_3 va précipiter le plus rapidement puis le CdS puis le FeS car la constante de précipitation est plus grande que les autres. (du Fe_2S_3)

$K_3 > K_1 > K_2 \quad \rightarrow Fe_2S_3 > CdS > FeS$

b) $H_2S_{(g)} \rightleftharpoons HS^-_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ $\quad K_{A1} = 9,1 \cdot 10^{-8}$

$HS^-_{(aq)} \rightleftharpoons S^{2-}_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ $\quad K_{A2} = 1,1 \cdot 10^{-12}$

$\rightarrow H_2S_{(aq)} \rightleftharpoons S^{2-}_{(aq)} + 2H^+_{(aq)}$ $\quad K_T = K_{A1} \cdot K_{A2} = 1,001 \cdot 10^{-19}$

$K_T = \frac{[H^+]^2 \cdot [S^{2-}]}{[H_2S]} \rightarrow [S^{2-}] = \frac{K_T \cdot [H_2S]}{[H^+]^2} = \frac{1,001 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1 \text{ mol/L}}{(10^{-2})^2}$

$\rightarrow [S^{2-}] = 1,001 \cdot 10^{-16}$ mol/L

$K_S = [Cd^{2+}][S^{2-}] \rightarrow [Cd^{2+}] = \frac{K_S}{[S^{2-}]} = \frac{1,40 \cdot 10^{-29}}{1,001 \cdot 10^{-16}} = 1,40 \cdot 10^{-3}$ mol/L

Q3

$Fe_{(s)}$ | $Fe^{3+}_{(aq)} = 0{,}6\ mol/L$, $V = 1\ L$ || $[CuCl_4^{2-}]_{(aq)} = 0{,}6\ mol/L$, $[CuCl_4^{-}]_{(aq)} = 0{,}3\ mol/L$, $Cl^-_{(aq)} = 3\ mol/L$, $V = 1\ L$ | $P_{t\,(s)}$

a) $Fe_{(s)} \rightleftharpoons Fe^{3+}_{(aq)} + 3\,e^{\ominus}$

$([CuCl_4]^{2-} + 1\,e^{\ominus} \rightleftharpoons [CuCl_2]^- + 2\,Cl^-_{(aq)}) \times 3$

Équation globale :

$Fe_{(s)} + 3[CuCl_4]^{2-}_{(aq)} \rightleftharpoons Fe^{3+}_{(aq)} + 3[CuCl_2]^-_{(aq)} + 6\,Cl^-_{(aq)}$

b) $Cu^+_{(aq)} + 2\,Cl^-_{(aq)} \rightleftharpoons [CuCl_2]^-_{(aq)}$ $\quad K_1 = 5.10^4$

$Cu^{2+}_{(aq)} + 4\,Cl^-_{(aq)} \rightleftharpoons [CuCl_4]^{2-}_{(aq)}$ $\quad K_2 = 1.10^5$

$Cu^{2+}_{(aq)} + 1\,e^{\ominus} \rightleftharpoons Cu^+_{(aq)}$ $\quad K_3 = e^{\frac{nF\Delta E^\circ_{Cu^{2+}/Cu^+}}{RT}}$

$[CuCl_4]^{2-}_{(aq)} + 1\,e^{\ominus} \rightleftharpoons [CuCl_2]^-_{(aq)}$ $\quad K_T = K_1 \cdot \frac{1}{K_2} \cdot K_3 = 193{,}48$

on sait que : $K_T = K = e^{\frac{nF\Delta E^\circ_{complexe}}{RT}} \rightarrow \Delta E^\circ_{complexe} = \frac{\ln K \cdot RT}{nF} = 0{,}135\,V$

c) $\Delta E = \Delta E_{cath} - \Delta E_{Anode}$
$= 0{,}137\,V$

$\Delta E_{cath} = \frac{0{,}135 - 8{,}314 \cdot 298}{96485} \cdot \ln\left(\frac{[Cl^-]^2 \cdot [CuCl_2^-]}{[CuCl_4^{2-}]}\right)$
$= 0{,}096\,V$

$\Delta E_{Anode} = \frac{-0{,}037 - 8{,}314 \cdot 298}{3 \cdot 96485} \cdot \ln\left(\frac{1}{[Fe^{3+}]}\right)$
$= -0{,}041\,V$

d) $n_{e^\ominus} = \frac{Q}{F} = \frac{it}{F} \rightarrow n_{e^\ominus} = \frac{3 \cdot 5400}{96485} = 0{,}168\ mol$

$Fe^{3+}_{(aq)} + 3\,e^{\ominus} \rightleftharpoons Fe_{(s)}$

i $n = 0{,}6$ $\quad 0{,}168$ $\quad 0$

$\rightleftharpoons$ $n = 0{,}6 - \frac{0{,}168}{3}$ $\quad 0$ $\quad \frac{0{,}168}{3} = 0{,}056\ mol$

$= 0{,}544\ mol$

$m_{Fe} = (0{,}056 \cdot 55{,}845)\,g$
$= 3{,}13\,g$

MVM

Chimie Mai 2015

(1 5:5)

1

$$[CuCl_2]^-_{(aq)} + 2\,Cl^-_{(aq)} \rightarrow [CuCl_4]^{2-}$$

	$[CuCl_2]^-_{(aq)}$	$2\,Cl^-_{(aq)}$	$[CuCl_4]^{2-}$
i	0,3 mol	3 mol	0,6
⇌	0,3 − 0,168 = 0,132 mol	3 − (2 · 0,168) = 2,664 mol	0,6 + 0,168 = 0,768 mol

$$\Delta E = E_{Cath} - E'_{Anode} = 0,172\,V$$

$$E'_{Cath} = 0,135 - \frac{8,314 \cdot 298}{1 \cdot 96485} \cdot \ln\left|\frac{[Cl^-]^2_{\rightleftharpoons} \cdot [CuCl_4]^-_{\rightleftharpoons}}{[CuCl_4]^{2-}_{\rightleftharpoons}}\right| = 0,130\,V$$

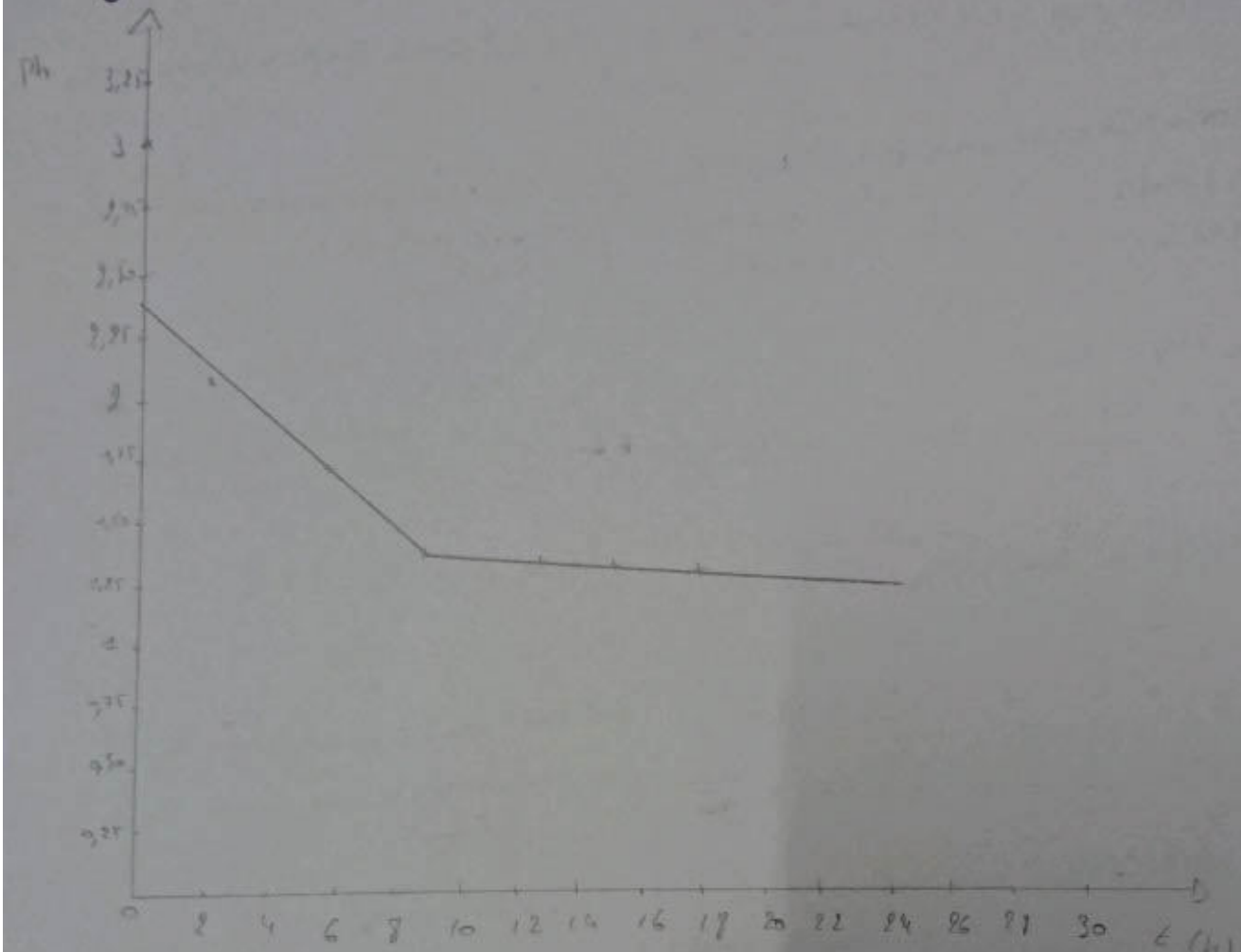
$$E'_{Anode} = -0,037 - \frac{8,314 \cdot 298}{3 \cdot 96485} \cdot \ln\left(\frac{1}{[Fe^{3+}]_{\rightleftharpoons}}\right) = -0,042\,V$$

MVM

Chimie : Mai 2015

②

Q5



a) la courbe décline puis se stagne. Ce type de graphique correspond à l'ordre 0

b) 50% éthanol = $t_{1/2}$

Par graphique je trouve $k = \frac{[Eth] - [Eth]}{18h - 0h} = 1,95 \cdot 10^{-3}$ mol/L.h | $k_1 = \frac{[Eth] - [Eth]}{9h - 0h} = 3,24 \cdot 10^{-3}$ mol/L.h

$[Eth]_0 = \frac{c}{MM} = \frac{3 g/L}{46 g/mol} = 0,065$ mol/L

$t_{1/2} = \frac{[Eth]_0}{k_1} \cdot \frac{1}{2} = 10,02$ h

1 Q4

a) $HOOC-CH=CH-COOH_{(aq)} + NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons HOOC-CH=CH-COONa_{(aq)} + H_2O_{(aq)}$

$HOOC-CH=CH-COONa_{(aq)} + NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons OOC-CH=CH-COONa_2 + H_2O$

$\rightarrow HOOC-CH=CH-COOH_{(aq)} + 2\,NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons OOC-CH=CH-COONa_{2\,(aq)} + 2H_2O$

$C = 0,3$ mol/L
$V = 0,02$ L

$C = 0,2$ mol/L
$V = 0,06$ L

$n = C.V$ (de l'acide)
$= 6.10^{-3}$ mol

$V_t = (0,06 + 0,02)$ L
$= 0,08$ L

$C_1 . V_1 = C_2 . V_2$

$\rightarrow \frac{V_2}{2} = \frac{C_1 . V_1}{C_2} = 0,03$ L $\rightarrow V_2 = 0,06$ L

$C = \frac{6.10^{-3}\text{ mol}}{0,08\text{ L}} = 0,075$ mol

$pH = 14 + \log\sqrt{K_{b_2} . C_b}$
$= 9,47$

b) $pH = 6 \rightarrow [H^+] = 10^{-6}$ on sait aussi que $[H^+] = K_{A_2} \frac{C_a}{C_b}$

$\rightarrow \frac{[H^+]}{K_{A_2}} = \frac{C_a}{C_b} \rightarrow 1,167 = \frac{n_a}{n_b}$ (on peut ramener C_a à n_a car le V_t est le même)

ON SAIT : $n_a = 0,1 . V_A$ et que $n_b = 0,1 V_b - 0,1 V_A$

$- V_b + V_A = 1 \Rightarrow V_b = -V_A + 1$

$\Rightarrow 1,167 = \frac{0,1 . V_A}{0,1 - 0,1 V_A - 0,1 V_A}$

$\Rightarrow 0,117 = 0,333 V_A$

$\Rightarrow V_A = 0,350$ L

$V_b = 1 - V_A = 0,650$ L

B → maléate de Sodium
A → HCl

c) Ça n'aura aucun effet car NaCl est un élément inactif car Na^+ acide inactif et Cl^- base inactif.

MVN

Chimie : Mai 2015

③

Q1

a)

	Acide propanoïque	acide pentanoïque
formule	CH_3CH_2COOH	$CH_3(CH_2)_3COOH$
$T_{éb}$	141°C	186°C
ΔH_{VAP}	33,8	45,9

① Formule Clapeyron : $\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{-\Delta H_{VAP}}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$

b) à 126°C → mélange idéal

$P_T = P_A^\circ \cdot \chi_A^L + P_B^\circ \cdot \chi_B^L$ ⇒ $330 = 520x + 130(1-x)$

→ $x = \frac{330-130}{390} = 0,513$

où $P_T = 330$ torr

$x = \chi_A^L$

$Y = \chi_B^L$

$1 = x + y$

$1 - x = y$

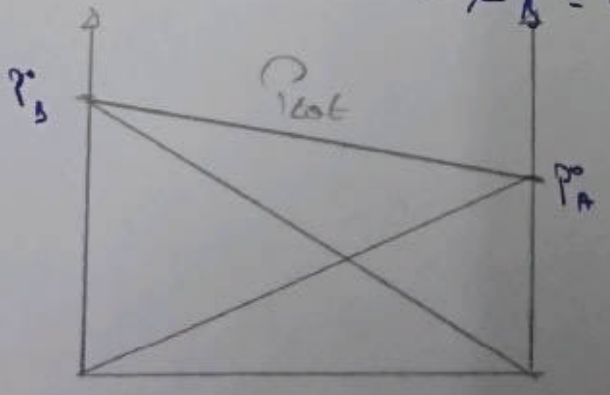
→ $\chi_A^L = 0,513$ et $\chi_B^L = 0,487$

$\chi_A^V = \frac{P_A^\circ \cdot \chi_A^L}{P_A^\circ \cdot \chi_A^L + P_B^\circ \cdot \chi_B^L} = 0,808$

$1 - \chi_A^V = \chi_B^V$

→ $\chi_B^V = 0,192$

c)



ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2015/2016

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 4 janvier 2016

I. Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(10 points)*

Voici différentes propositions de configuration électronique pour des atomes.

1) Identifiez, à l'aide d'une croix, celles qui sont correctes.
2) Parmi les configurations correctes, identifiez de la même manière si la configuration est celle de l'état fondamental ou celle d'un état excité de l'atome.
3) Donnez la position dans le tableau périodique (numéro ou nom de la famille, numéro de la période) des configurations correctes.

	Correcte	État fondamental	État excité	Famille	Période
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^4$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^5\ 5s^1$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^1$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^7\ 4s^2$					

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

Remplissez le tableau suivant, qui liste un ensemble de propriétés moléculaires. L'oxygène et le soufre appartiennent tous deux à la 6e famille des groupes principaux, tandis que l'iode et le chlore sont des halogènes (famille VIIa).

	HIO_3	SCl_2
Nomenclature		
Structure(s) de Lewis		
Charges formelles		
Géométrie		
Types d'interactions intermoléculaires possibles		

À votre avis, laquelle de ces deux molécules a l'enthalpie de vaporisation standard ($\Delta_{vap}H°$) la plus élevée ? Justifiez sur base des réponses apportées dans le tableau ci-dessus.

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

La molécule de difluor (nombre atomique Z=9) est diamagnétique, alors que celle de dioxygène (Z=8) est paramagnétique. Justifiez cette différence en faisant appel à la structure électronique fondamentale de ces deux molécules, telle que donnée par la théorie des orbitales moléculaires. Sur la base de ces mêmes configurations, déterminez à laquelle de ces deux molécules est associée l'énergie de liaison la plus élevée.

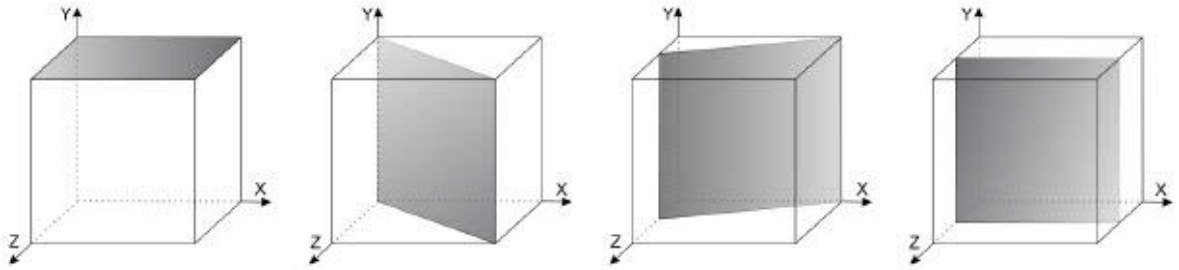
Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(8 points)*

Déterminez les indices de Miller (h,k,l) des plans suivants, faisant partie d'un réseau cubique :



QUESTION 5 *(7 points)*

On observe souvent qu'un gaz réel suit l'équation des gaz parfaits pour une certaine température T_B, appelée la « température de Boyle ». Obtenez une expression pour cette température en fonction des paramètres a et b de l'équation de van der Waals

$$P = \frac{RT}{V_m - b} + \frac{a}{V_m^2},$$

dans laquelle V_m est le volume molaire du gaz, maintenu constant. Notez qu'avec cette notation, l'équation des gaz parfaits est donnée par $P = RT/V_m$.

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 6 *(15 points)*

La formation d'acide acétique à partir de ses éléments dans leur état de référence est un processus exothermique dans les conditions standard, que cet acide soit sous forme liquide ou gazeuse :

$$2\ C(s,gr) + 2\ H_2\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow CH_3COOH\ (g) \quad \Delta_f H° = -\ 432\ kJ/mol$$

$$2\ C(s,gr) + 2\ H_2\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow CH_3COOH\ (l) \quad \Delta_f H° = -\ 484\ kJ/mol$$

a) Quel est le signe de la variation d'entropie pour chacune de ces réactions ? Justifiez.
b) Calculez l'enthalpie de vaporisation de l'acide acétique.
c) Existe-t-il une température d'inversion pour la vaporisation de l'acide acétique ? Justifiez.

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 7 *(15 points)*

Vous trouverez ci-dessous une série de questions à choix multiples. Indiquez la seule réponse correcte en noircissant la case correspondante et justifiez votre choix en une ligne maximum.
Pondération : réponse valide et justifiée : 3 points ; réponse valide non justifiée : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : - 1 point !

a) Soit deux gaz parfaits de masse molaire M_1 et M_2, respectivement aux températures T_1 et T_2. Laquelle de ces affirmations concernant la vitesse moyenne des particules, v_1 et v_2, est correcte ?

- o Si $M_1 > M_2$ et $T_1 < T_2$, alors $v_1 > v_2$
- o Si $M_1 < M_2$ et T_1 x= T_2, alors $v_1 = v_2$
- o Si $M_1 > M_2$ et $T_1 = T_2$, alors $v_1 < v_2$
- o Si $M_1 = M_2$ et $T_1 > T_2$, alors $v_1 < v_2$

Justification :

b) Dans le diagramme des phases d'un corps pur, la variance de Gibbs le long de la courbe correspondant à l'équilibre solide-gaz vaut

- o -1
- o 0
- o 1
- o 2

Justification :

c) La capacité calorifique molaire à pression constante d'un certain gaz diatomique à TPN vaut $(7/2)\,R$. Cette valeur peut être attribuée aux degrés de liberté de

- o translation et vibration
- o rotation et translation
- o vibration, translation et rotation
- o rotation et vibration

Justification :

d) Une orbitale moléculaire anti-liante

- o ne peut jamais contenir d'électrons.
- o est caractérisée par une probabilité de présence négative.
- o est énergétiquement moins stable que l'orbitale liante correspondante.
- o ne joue aucun rôle dans le calcul de l'ordre de liaison d'une molécule diatomique.

Justification :

e) Selon les lois de la thermodynamique, durant toute transformation spontanée

- o l'entropie de l'univers augmente.
- o l'énergie de l'univers diminue.
- o l'enthalpie du système reste constante.
- o l'énergie libre de Gibbs du système augmente.

Justification :

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2015/2016

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 4 janvier 2016

II. Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points). La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

Le zinc est le quatrième métal le plus utilisé sur terre. Il est extrait d'un minerai contenant du sulfure de zinc. La première étape de la purification du zinc est l'oxydation du sulfure de zinc contenu dans le minerai par le dioxygène de l'air. Cette réaction mène à la formation à 910 °C d'oxyde de zinc solide et de dioxyde de soufre gazeux. Dans un second temps, on effectue une réduction de l'oxyde de zinc à 1300 °C en le faisant réagir avec du monoxyde de carbone. Cette deuxième réaction conduit à la formation de dioxyde de carbone et de zinc métallique gazeux.

a) Écrivez les équations moléculaires des deux réactions mentionnées.
b) Calculez la fraction massique du zinc dans un minerai dont la purification d'un échantillon de 0,500 kg a nécessité 3000 L d'air à 910 °C et à pression atmosphérique.

Les fractions molaires des différents constituants présents dans l'air utilisé sont :
21,0 % d'O_2, 77,8 % de N_2 et 1,20 % de gaz inertes.

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

Dans l'eau la pression augmente d'une atmosphère tous les 10 m, au fur et à mesure que l'on descend en profondeur. Les plongeurs en scaphandre autonome doivent respirer le contenu de leur bouteille de plongée à la pression ambiante, c'est-à-dire à la pression qui règne là où ils se trouvent à un moment donné de la descente. Considérons le cas d'un plongeur ayant rempli une bouteille de 10 litres d'air à 25 °C et à une pression de 180 atm. Combien de temps cette bouteille lui permettrait-elle de respirer à une profondeur de 35 mètres et une température de 10 °C, sachant qu'il respire 12 fois par minute et que chaque respiration consomme 0,50 L d'air ?

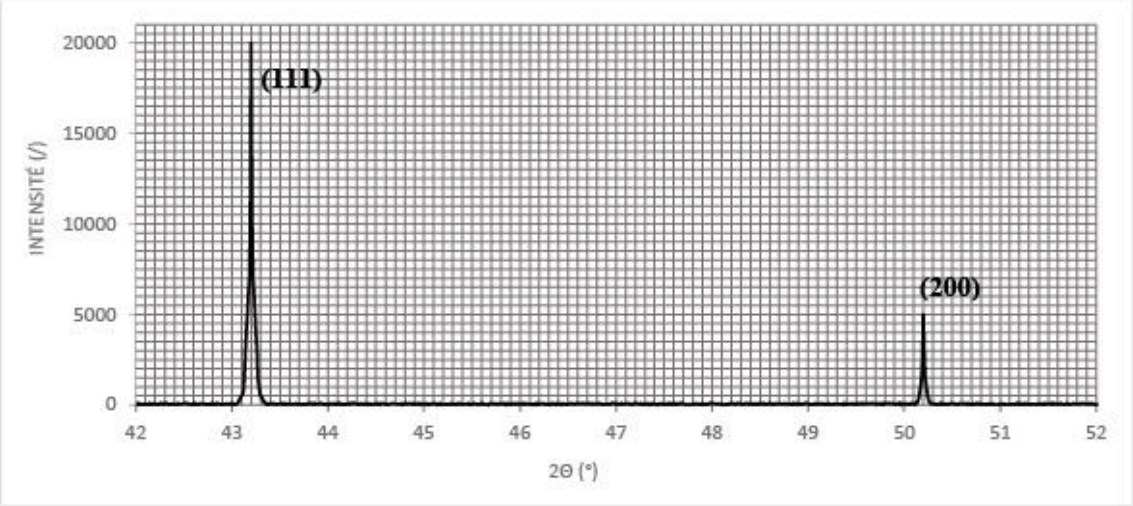
Interrogation de chimie - janvier 2016 - Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(25 points)*

Soit le graphe de la diffraction de rayons X du cuivre pur (cubique à faces centrées) :



À partir des données tirées de ce graphique, dans lequel les indices de Miller des plans concernés sont indiqués, on vous demande :
a) de calculer le paramètre de maille du cuivre, sachant que la longueur d'onde des rayons X incidents vaut 0,154 nm.
b) de déterminer la valeur de la distance minimale entre deux atomes de cuivre et d'en déduire la valeur du rayon cristallographique d'un atome de cuivre.

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(25 points)*

L'énergie libérée par la combustion d'une bougie de 35,68 g, constituée de pentacosane ($C_{25}H_{52}$), est utilisée pour chauffer une canette en aluminium contenant 330 g d'eau. La combustion de la bougie a lieu sous une pression de 1 bar et la canette vide pèse 13,2 g. La température de l'eau et de la canette est initialement de 20,0 °C et atteint 60,0 °C après chauffage. La bougie est éteinte à ce moment et sa masse finale est alors de 34,49 g.

a) Ecrivez l'équation de combustion du pentacosane.
b) On considère que les pertes calorifiques sont négligeables et que les différentes capacités calorifiques impliquées restent constantes. Dans ces conditions, calculez la valeur de l'enthalpie de formation du pentacosane dans les conditions standard.

Faculté des Sciences

Année académique 2015/2016

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 23 mai 2016

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(15 points).*

L'éthanol et le méthanol sont 2 alcools dont les températures d'ébullition normales valent 79 °C et 65 °C respectivement.

a) Que vaut leur tension de vapeur à 75 °C ?
b) Si une solution contient 35,0 g de méthanol et que la pression de la vapeur en équilibre avec cette solution vaut 1,00 atm à 75 °C, quelle masse d'éthanol contient-elle ?
c) Quelles sont les fractions molaires des deux constituants dans la phase vapeur surmontant la solution ?

Examen de chimie - mai 2016

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

L'activité des protéines, comme par exemple les enzymes, n'est efficace que dans des domaines de pH limités, qui stabilisent les conformations actives des macromolécules biologiques et optimisent les vitesses de réactions biochimiques. Ainsi, le pH du sang fœtal humain à 37 °C doit être maintenu à 7,3.

Cela est possible grâce, entre autres, au couple acide-base $CO_2(aq)/HCO_3^-(aq)$ qui fait du sang un milieu tamponné. Nous désirons recréer ces conditions en laboratoire.

a) Que vaut le pK_{a1} de l'acide carbonique à 37 °C ?
b) De quel volume d'une solution de $CO_2(aq)$ à 0,20 M avons-nous besoin pour préparer, à partir de 120 mg de NaOH(s), une solution tampon au pH désiré à 37 °C ?

Examen de chimie - mai 2016

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(25 points)*

Le chlorure de chromyle, CrO_2Cl_2, est un oxydant puissant qui permet, par exemple, d'oxyder le toluène en benzaldéhyde. Un chercheur veut synthétiser cette molécule via l'oxydation d'ions Cr^{2+} par du dioxygène : $Cr^{2+}(aq) + O_2(aq) \rightleftharpoons CrO_2^{2+}(aq)$. Pour caractériser la cinétique de cette réaction, il étudie dans une première expérience (menée à 25 °C) la vitesse de décomposition de l'ion chromyle :

$$CrO_2^{2+}(aq) \xrightarrow{k_1} Cr^{2+}(aq) + O_2(aq)$$

La réaction a pour constante de vitesse $k_1 = 2{,}5\times10^{-4}$ s^{-1}. Après 16 minutes et 40 secondes, la concentration en ions CrO_2^{2+} vaut $1{,}5\times10^{-4}$ $mol\cdot L^{-1}$.

a) Quel est l'ordre en CrO_2^{2+} de cette réaction ? Que vaut le temps de demi-réaction ?
b) Calculez la concentration initiale en CrO_2^{2+}.

Dans un deuxième temps, il mesure la vitesse initiale, v_0, de la réaction de formation de l'ion chromyle :

$$Cr^{2+}(aq) + O_2(aq) \xrightarrow{k_2} CrO_2^{2+}(aq)$$

Les conditions initiales utilisées sont les suivantes :

	$[Cr^{2+}]$ $(mol\cdot L^{-1})$	$[O_2]$ $(mol\cdot L^{-1})$	v_0 $(mol\cdot L^{-1}\cdot s^{-1})$
Expérience 1	$1{,}5\times10^{-4}$	$1{,}5\times10^{-4}$	3,6
Expérience 2	$6{,}0\times10^{-4}$	$1{,}5\times10^{-4}$	14,4
Expérience 3	$1{,}5\times10^{-4}$	$3{,}0\times10^{-4}$	7,2

c) Déterminez l'ordre global et les ordres partiels de cette deuxième réaction.
d) Déterminez le temps de demi-réaction pour l'Expérience 1 dans le tableau ci-dessus.

Examen de chimie - mai 2016

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 3 *(suite)*

Examen de chimie - mai 2016

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 4 *(20 points)*

On réalise la synthèse du thiosulfate de sodium, $Na_2S_2O_3(aq)$, en faisant réagir, à 25 °C et en milieu acide, 50 mL d'une solution aqueuse de sulfite de sodium de concentration $5{,}03\times10^{-1}$ mol·L^{-1} avec 1,46 g de soufre solide rhomboédrique, S(s).

a) Calculez le degré d'oxydation du soufre dans les trois composés mentionnés.
b) Ecrivez les demi-équations redox correspondant aux couples impliqués et la réaction globale, correspondant à la synthèse du thiosulfate de sodium.
c) Sur base des informations thermodynamiques suivantes (prises à 25 °C), calculez la valeur de la constante d'équilibre dans les conditions de l'expérience :

	$\Delta_f H^0$ (kJ·mol^{-1})	S^0 (J·mol^{-1}·K^{-1})
$S_2O_3^{2-}(aq)$	-652,3	67,0
$SO_3^{2-}(aq)$	-635,5	-29,0

d) Quelle est la composition finale du mélange ?

Examen de chimie - mai 2016

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 5 *(20 points)*

Au cours d'une manipulation de démonstration, un enseignant étudie la dissolution d'un sel dans l'eau pure à différentes températures. Il note ses conclusions dans le tableau ci-dessous :

Température (°C)	0	20	40	60	80
K_s	$1{,}49\times10^{-5}$	$2{,}11\times10^{-5}$	$2{,}87\times10^{-5}$	$3{,}77\times10^{-5}$	$4{,}81\times10^{-5}$

a) Déterminez graphiquement l'enthalpie de dissolution de ce sel.

b) Calculez la variation d'entropie et la variation d'énergie libre pour cette dissolution à 20 °C.

c) L'enseignant a préparé 500 mL (à 0,100 $mol \cdot kg^{-1}$) de solution aqueuse du sel, qu'il divise en deux parties. Dans la première moitié il ajoute du nitrate d'argent : on observe la formation d'un précipité. Il congèle la seconde moitié de solution : on observe que sa température de solidification est de -0,38 °C. Sachant que la constante cryoscopique de l'eau vaut 1,86 $K \cdot kg \cdot mol^{-1}$, déterminez si le sel étudié est MgI_2, AlI_3, NH_4I ou NH_4F.

HVM

Chimie Examen Mai 2016

(1)

Q_1 a)

$T_{éb\ méth} = 65°C$; $T_{éb\ éth} = 79°C$

$\Delta H_{VAP_{éth}} : \Delta_f H_{(g)} - \Delta_f H_{(l)} = 42,59\ kJ/mol$

$\Delta H_{VAP\ méth} = \Delta_f H_{(g)} - \Delta_f H_{(l)} = 38\ kJ/mol$

$P^\circ_{méth} : \ln\left(\frac{P_{VAP}}{P^\circ}\right) = \frac{-\Delta H_{VAP}}{R} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^\circ}\right)$

$P_{VAP} = e^{0,389} \cdot 1\ atm \rightarrow P_{VAP} = 1,48\ atm$

$P^\circ_{éth} : \ln\left(\frac{P_{VAP}}{P^\circ}\right) = \frac{-\Delta H_{VAP}}{R} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^\circ}\right)$

$P_{VAP} = e^{(-0,162)} \cdot 1\ atm \rightarrow 0,85\ atm = P_{VAP}$

$P^\circ = 1\ atm$

b) $P_t = P^\circ_{éth} + P^\circ_{méth}$ et on sait que $1 = \chi^L_{méth} + \chi^L_{éth}$

$\Rightarrow 1 - \chi^L_{méth} = \chi^L_{éth}$

$\Rightarrow P_t = P^\circ_{éth}\left(1 - \chi^L_{méth}\right) + P^\circ_{méth} \cdot \chi^L_{méth}$

$\Rightarrow 1 = 0,85\left(1 - \chi^L_{méth}\right) + 1,48 \cdot \chi^L_{méth}$

on sait que $\chi^L_{méth} = \frac{n_{méth}}{n_{méth} + n_{éth}}$ et $n_{méth} = \frac{35\,g}{32,04\,g/mol} = 1,09\,mol$

$\Rightarrow 0,24 = \chi^L_{méth} \Rightarrow 0,24 = \frac{1,09}{1,09 + n_{éth}}$ $\Rightarrow n_{éth} = \frac{1,09}{0,262} = 4,17\,mol$

$m_{éth} = n_{éth} \cdot m_{éth} = 191,96\,g$

c) $\chi^G_{éth} = \frac{P_{éth}}{P_{éth} + P_{méth}} = \frac{\chi^L_{éth} \cdot P^\circ_{éth}}{\chi^L_{éth} \cdot P^\circ_{éth} + \chi^L_{méth} \cdot P^\circ_{méth}}$

$= \frac{0,85 \cdot 0,79}{0,85 \cdot 0,79 + 1,48 \cdot 0,21} = 0,68$

$1 = \chi^G_{éth} + \chi^G_{méth} \Rightarrow \chi^G_{méth} = 1 - 0,68 = 0,32$

Q2

a) $K_A = K$ ici $K = e^{\left(\frac{-\Delta G^\circ}{RT}\right)} = e^{\left(\frac{-\Delta H}{RT}\right)} \cdot e^{\left(\frac{\Delta S}{R}\right)}$

$H_2CO_{3(aq)} \rightarrow H^+_{(aq)} + HCO_3^-{}_{(aq)}$ K_A

$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H_{HCO_3^-} + \Delta_f H_{H^+} - \Delta_f H_{H_2CO_3} = 7,66$ kJ/mol

$\Delta_r S^\circ = \Delta_f S_{HCO_3^-} + \Delta_f S_{H^+} - \Delta_f S_{H_2CO_3} = 96,2$ J/mol K

$\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ = \left(7,66 \cdot 10^3 - (310 \cdot 96,2)\right)$ kJ/mol

$\Delta G^\circ = -22,16$ kJ/mol

$K = e^{\frac{+22,16 \cdot 10^3}{8,314 \cdot 310}} = 5425,08$

$pK_A = -\log K_A \Rightarrow pK_A = -3,73$

b) $pH = 7,3 \rightarrow [OH^-] = 10^{-6,7}$ mol/L

$= 1,995 \cdot 10^{-7}$ mol/L

$\rightarrow [OH^-] = K_b \frac{C_b}{C_a} \Rightarrow \frac{[OH^-]}{K_b} = \frac{C_b}{C_a}$ Volume total identique

$\Rightarrow \frac{[OH^-]}{K_b} = \frac{n_b}{n_a} \Rightarrow 8,97 = \frac{n_{NaOH}}{n_A - n_{NaOH}} \Rightarrow 8,87 = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot V_A - 3 \cdot 10^{-3}}$

$\rightarrow 1,774\, V_A = 3 \cdot 10^{-3} + 0,02661$

$\rightarrow V_A = \frac{0,02961}{1,774} = 0,017$ L

$V_A = 17$ mL

MVH

Chimie Examen Mai 2016

(2)

Q3

a) $CrO_2^{2+}(aq) \xrightarrow{k_1} Cr^{2+}(aq) + O_2(aq)$

$k_1 = 2,5 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$; $[A_t] = 1,5 \cdot 10^{-4}$ mol/L

L'ordre est de 1 car comme on peut le voir à partir du k_1 son unité est s^{-1} et il y a que l'ordre 1 où la constante cinétique possède comme unité s^{-1}

$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1} = 2772,59\ s$

d)

⚠ Ici l'ordre est de 2 car on prend l'équation globale donc l'ordre global. Ici l'ordre global est 2

$v_0 = k_2 \cdot [Cr^{2+}][O_2] \rightarrow k_2 = \frac{v_0}{[Cr^{2+}][O_2]} = 1,6 \cdot 10^8$ L/mol.s

$t_{1/2} = \frac{1}{k_2 \cdot [A_0]} = \frac{1}{k \cdot [Cr^{2+}]} = 4,17 \cdot 10^{-5}\ s$

b) $\ln[A_t] = \ln[A_0] - kt \rightarrow \ln[A_0] = \ln[A_t] + kt$

$\ln[A_0] = -8,56$

$[A_0] = 1,91 \cdot 10^{-4}$ mol/L

c) l'ordre partiel : ordre 1 pour Cr^{2+}

ordre 1 pour O_2

l'ordre global = Σ ordre partiel = $1 + 1 = 2$

Q4

a) $Na_2S_2O_3$: $S = +2$

$S_{(s)}$: $S = 0$

$NaSO_3$: $S = +4$

b) $S_2O_{3(aq)}^{2-} + 4e^- + 6H_{(aq)}^+ \rightleftharpoons 2S_{(s)} + 3H_2O_{(l)}$

$S_2O_{3(aq)}^{2-} + 3H_2O \rightleftharpoons 6H^+_{(aq)} + 2SO_{3(aq)}^{2-} + 4e^-$

$2S_{(s)} + 2SO_{3(aq)}^{2-} \rightleftharpoons 2S_2O_{3(aq)}^{2-}$

$\Rightarrow S_{(s)} + SO_{3(aq)}^{2-} \rightleftharpoons S_2O_{3(aq)}^{2-}$

$\Rightarrow S_{(s)} + Na_2SO_{3(aq)} \rightleftharpoons Na_2S_2O_{3(aq)}$

c) $\Delta_r H = \Delta_f H_{Na_2S_2O_3} - \Delta_f H_{Na_2SO_3} - \Delta_f H_S$

$= (-652,3 + 635,5 + 0)\ kJ/mol = -16,8\ kJ/mol$

$\Delta_r S = \Delta_f S_{Na_2S_2O_3} - \Delta_f S_{Na_2SO_3} - \Delta_f S_S$

$= (67,0 + 29,0 - 31,80)\ J/mol\,K = 64,2\ J/mol\,K$

$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = -35,93\ kJ/mol$

$K = e^{\frac{-\Delta G}{RT}} = 2.10^6$

MVM

Chimie Examen MAi 2016

Q4 d)

	$S_{(s)}$	+ $Na_2SO_{3(aq)}$	→ $Na_2S_2O_{3(aq)}$
n_i	$n = \frac{m}{M}$ = 0,0455 mol	$n = C.V$ = 0,025 mol	0 mol
	excès	limitant	
$n_{\rightleftharpoons}$	0,0455 − x	0,025 − x	+ X

$V_E = 0,05\ L$

On sait que $K = K_C \rightarrow K = \frac{[Na_2S_2O_3]}{[Na_2SO_3]}$

$\Rightarrow K = \frac{\frac{x}{0,05}}{\frac{0,025-x}{0,05}} = 1.10^6 - \frac{2x.10^6}{0,05} = \frac{x}{0,05}$

$\Rightarrow x = \frac{1.10^6 . 0,05}{2.10^6} = 0,025$

$n_{\rightleftharpoons}$ pour le $S_{(s)}$ = 0,025 mol, Na_2SO_3 = 0 mol et pour le $Na_2S_2O_3$ = 0,025 mol

Q5

a) $\frac{\ln(4,81.10^{-5}) - \ln(1,49.10^{5})}{\left(\frac{1}{353} - \frac{1}{273}\right)} = \frac{\Delta H_{diss}}{R}$

$\Rightarrow -1411,71\ K^{-1} = \frac{\Delta H_{diss}}{R} \Rightarrow \Delta H_{diss} = 11,74\ kJ/mol$

Par graphique on trouvera ± la même valeur

b) $K_S = K = e^{-\Delta H/RT} \cdot e^{\Delta S/R}$

→ $\left(\ln K_S + \frac{\Delta H}{RT}\right) \cdot R = \Delta S \rightarrow \Delta S = 141,99 \text{ J/mol k}$

ici j'ai utilisé $K_S = 2,11 \cdot 10^5$ et $T = 293K$

*

c) $\Delta T = i \cdot K_{éb} \cdot b$

$i = \frac{\Delta T}{K_{éb} \cdot b} = -2 \rightarrow i = 2$

- i de $HgI_2 = 3$ car $Hg^{2+} + 2I^-$ du coup $\neq 2$
- i de $AlI_3 = 4$ car $Al^{3+} + 3I^-$ du coup $\neq 2$

il reste plus que NH_4I et NH_4F qui ont tous les 2 un $i = 2$.

Mais on nous dit que la molécule peut précipiter or quand on voit les tables, on remarque NH_4F ne précipite pas du coup le composé utilisé est le NH_4I.

*

$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$

$= 11,74 \text{ kJ/mol} - (293K \cdot 0,142 \text{ kJ/mol k})$

$= -29,87 \text{ kJ/mol}$

Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, MATHEMATIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 30 octobre 2017

NOM, Prénom : .....

Section et numéro de matricule : 1

ATTENTION : Pour toutes les questions, soignez votre écriture ET votre orthographe

QUESTION 1 *(15 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels.*

Le phosphate d'hydrogène (acide phosphorique) est un composé utilisé dans la fabrication des engrais. Il est également présent en faibles quantités dans les boissons communément appelées « soft ». L'acide peut être préparé en 2 étapes successives :

1) Oxydation du tétraphosphore blanc (P_4) en présence de dioxygène pour former du pentoxyde de diphosphore (P_4O_{10})
2) Réaction du pentoxyde de diphosphore avec l'eau pour former le produit final recherché qu'est l'acide phosphorique.

204 g d'un mélange de tétraphosphore et d'impuretés réagissent avec un excès de dioxygène pour former le pentoxyde de diphosphore. Dans la seconde étape, 550 g d'acide phosphorique (phosphate d'hydrogène) sont récoltés.

a) Écrire les équations de ces réactions.
b) Calculer le pourcentage d'impuretés dans le mélange d'origine.

Informations utiles : masse atomique du phosphore : 30,9738 u ;
masse atomique de l'oxygène : 15,9994 u ; masse atomique de l'hydrogène : 1,0079 u

$$P_4(s) + 5O_2(g) \rightarrow P_4O_{10}(s)$$

$$P_4O_{10}(s) + 6\,H_2O(l) \rightarrow 4\,H_3PO_4\,(l)$$

$$nH_3PO_4/4 = nP_4O_{10} = nP_4$$

$$mP_4 = mH_3PO_4 \,.\, MP_4/4.\, MH_3PO_4 = 174\ g$$

$$\%impuretés = (204-174)/204 = 14{,}8\ \%$$

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(15 points)*

Le phosphore-33 ($^{33}_{15}P$) est utilisé en laboratoire notamment pour marquer les nucléotides de l'ADN et l'ARN. Il se désintègre en ^{33}S en émettant une particule β^-. Sa demi-vie est de 25,5 jours.

a) Écrire l'équation de désintégration correspondante
b) Donner le nombre de neutrons et protons présents dans le phosphore-33.
c) À partir d'une masse initiale de 5,00 g, quelle sera la masse résiduelle de phosphore-33 après 31 jours ? après 200 jours ?

a)

$$^{33}_{15}P \rightarrow {}^{33}_{16}S + {}^{0}_{-1}e$$

b) ***nombre de neutrons = 33-15 = 18***
nombre de protons = 15

c) $m(t) = m(t=0)e^{-kt}$

$t_{1/2} = ln2/k$

$m(t) = 5{,}00\ e^{-ln2.t/t1/2}$

$31\ j = 2{,}15\ g$
$200\ j = 2{,}18 \cdot 10^{-2}\ g$

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(15 points)*

3.1. Le formaldéhyde (méthanal, CH_2O) est un composé organique produit lors de combustions incomplètes. Il se forme également lorsque le dioxygène réagit avec le méthane sous l'action des rayons solaires dans l'atmosphère. C'est encore un contaminant prouvé de l'air confiné dans les habitations.

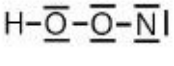
a) Compléter le tableau ci-après concernant les trois éléments présents dans la molécule.
b) Représenter cette molécule en structure de Lewis, et justifier le schéma dessiné.

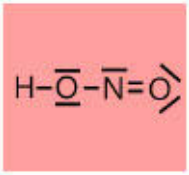
c) Quelle est la structure géométrique de cette molécule ?

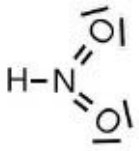
3 liens effectifs : triangulaire plane :

Élément	Hydrogène	Carbone	Oxygène
Structure électronique (état fondamental)	**$1s^1$**	**$1s^2\ 2s^2\ 2p^2$**	**$1s^2\ 2s^2\ 2p^4$**
Nombre d'électrons sur la couche externe	**1**	**4**	**6**
Nombre de doublets non-liants dans la molécule	**0**	**0**	**2**

3.2. Choisissez la bonne représentation de Lewis de HNO_2 parmi les suivantes. Justifiez.







Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(15 points)*

Soient les éléments suivants ainsi que leur configuration électronique :

$_{9}F$: $(He)2s^2 2p^5$

$_{11}Na$: $(Ne)4s^1$

$_{35}Br$: $(Ar)3d^{10}4s^2 4p^4 5s^1$

$_{30}Zn$: $(Ar)3d^{10}4s^2$

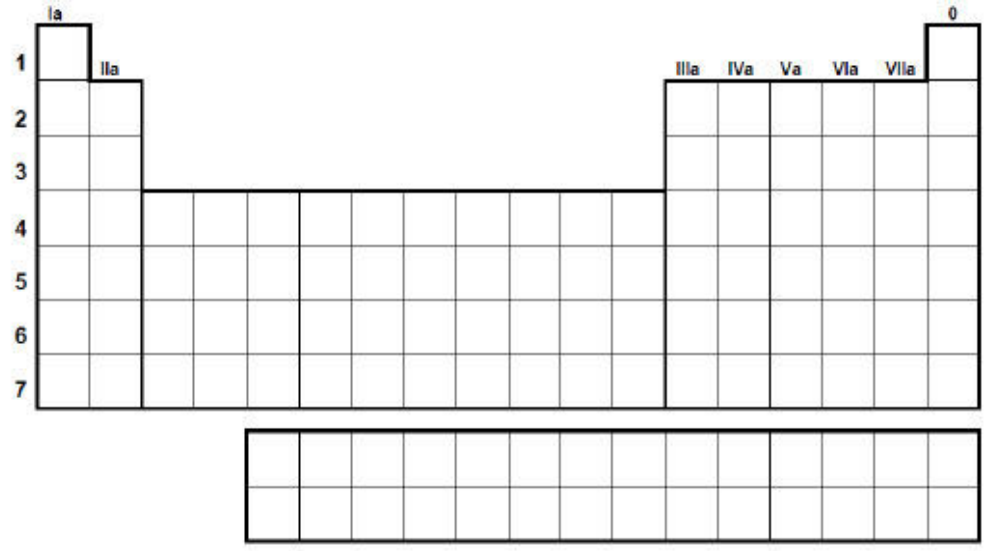
a) Quel(s) est (sont) l'(les) élément(s) dont la configuration électronique donnée n'est pas la configuration électronique fondamentale ?
Na, Br

b) Donner la configuration électronique fondamentale de cet(ces) élément(s).

Na : $(Ne)3s^1$ ou $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$

Br : $(Ar)\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^5$ ou $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^5$

c) Placer tous les éléments dans le tableau périodique illustré ci-dessous.



d) Classer ces éléments par ordre croissant d'électronégativité. Justifier.

Na – Zn – Br – F : Na, alcalin, extrême gauche du tableau périodique, éléments à l'électronégativité la plus faible ; Zn = métal, éléments à faible électronégativité ; Br : halogène : forte attractivité pour les électrons, colonne 7, lui manque un électron pour l'octet. Fluor, halogène comme le brome, mais « plus haut », donc plus petit, donc la couche de valence plus proche du noyau, donc plus forte attractivité pour les électrons.

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(10 points)*

Au laboratoire, un chercheur dispose de deux lasers illuminant respectivement à des longueurs d'onde de 460 nm et 650 nm.

Il souhaite observer un effet photoélectrique sur une surface de potassium.

Sachant que le travail d'extraction d'un électron de la surface est de 2,20 eV,

a) quel laser doit-il utiliser et
b) quelle sera la vitesse de l'électron éjecté ?

Données :

1 eV = $1{,}602176487.10^{-19}$ J, h = $6{,}62606896.10^{-34}$ J.s,

masse de l'électron = $9{,}1093897.10^{-31}$ kg, c = $2{,}99792458.10^{8}$ m/s

a)

travail de sortie, en J = 3,52 10^{-19} J

le laser à 460 nm (1)

car : $hc/\lambda_1 = 4{,}32 \times 10^{-19}$ J et l'énergie du laser 2 (650nm) = $3{,}06 \times 10^{-19}$ J

b) E cin = $hc/\lambda_1 - e\phi = mv^2/2$

$v = 4{,}19 \times 10^{5}$ m/s

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 6 *(30 points)*

6.1. Les électrons peuvent avoir un caractère ondulatoire.

Dans l'équation $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$, V représente :

a) La fréquence
b) La vitesse
c) **La tension d'accélération**
d) Le volume
e) Autre chose (préciser)

Entourer la bonne réponse.

Attention, cette sous-question est de type « QCM » (question à choix multiples). La bonne réponse rapporte des points (+4), une mauvaise réponse retire des points (-4).

6.2. Soient CH_4, NH_3, H_2O, toutes des molécules dans lesquelles les liaisons sont covalentes. Classer ces molécules par angle entre les liens A-H (où A = C, N, O) décroissant. Justifier. ***Attention : soignez votre écriture ET votre orthographe.***

CH_4 – NH_3 - H_2O car CH_4 forme un tétraèdre (4 liens effectifs « purs »), angle de 109 degrés, NH_3 est basé sur un tétraèdre (4 liens effectifs), mais avec 1 doublet non liant qui prend plus de place, ce qui rapproche les 3 liens N-H (107 degrés) et H_2O a aussi 4 liens effectifs, mais deux doublets non liants prenant plus de place, donc l'angle entre les liens O-H est de 104,5 degrés

6.3. Parmi les gaz suivants, lesquels sont des gaz à effet de serre ? Justifier.

Ar, H_2O, N_2, CO_2, CH_4, O_2

H_2O, CO_2, CH_4 car ils peuvent absorber et réémettre les rayonnements infrarouges lors de la vibration. En effet, soit la molécule possède un moment dipolaire permanent (H_2O), soit la molécule, bien que symétrique, présente un moment dipolaire lors d'une vibration antisymétrique (CO_2, CH_4)

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 6 *(suite)*

6.4. Pourquoi, dans l'élaboration de la structure électronique d'un atome, « remplit-on » l'orbitale 4s avant les orbitales 3d ? Justifier en 5 lignes maximum et, éventuellement, un schéma.

A cause de l'effet de pénétration, l'orbitale 4s présente une probabilité de présence des électrons près du noyau plus importante que l'orbitale 3d. Cette configuration est donc favorisée.

6.5. On prépare une solution aqueuse de NaCl en mélangeant 29,22 g de sel avec 970,88 g d'eau. Le volume total de la solution est de 1,00 L. *(12 points)*

Calculer, pour cette solution : a) la concentration molaire, b) la molalité, c) la fraction molaire en sodium, d) la fraction massique en chlore.

Informations utiles : masse atomique de l'oxygène : 15,9994 u ; masse atomique de l'hydrogène : 1,0079 u ; masse atomique du sodium : 22,9898 u ; masse atomique du chlore : 35,4530 u

M NaCl= 58,44 g.mol^{-1} ; n NaCl=0,5 moles ; M H_2O = 18,0152 g.mol^{-1} , nH_2O = 53,89 moles

a) C = n/V = 0,500/1 = 0,500 mol/L

b) molalité = n(soluté)/m (solvant -kg) = 0,500/0,97088 = 0,515 molal

c) xNa = nNa/(nNa+nCl+nH_2O) = 0,500/(1,00+53,89) = 9,11 10^{-3}

d) wCl = (0,5*35,453)/(29,22+970,88) = 1,77 10^{-2}

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2016/2017

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 9 janvier 2017

I. Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(10 points)*

Le phosphore a le numéro atomique 15. On vous demande :

a) d'écrire la configuration électronique d'un atome de cet élément dans son état fondamental ;
b) d'indiquer tous les nombres quantiques associés à chacun des électrons de valence du phosphore.

a) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$

b) 5 électrons de Valence → $3s^2\ 3p_x^1\ 3p_y^1\ 3p_z^1$

$n=3$	$n=3$	$n=3$	$n=3$	$n=3$
$l=0$	$l=0$	$l=1$	$l=1$	$l=1$
$m=0$	$m=0$	$m=0$	$m=1$	$m=-1$
$s=1/2$	$s=-1/2$	$s=1/2$	$s=1/2$	$s=1/2$

QUESTION 2 *(10 points)*

La configuration électronique de l'ion C_2^{n-} est $\sigma_{1s}^2\ \sigma_{1s}^{*2}\ \sigma_{2s}^2\ \sigma_{2s}^{*2}\ \pi_{2px}^2 \pi_{2py}^2 \sigma_{2p}^2$. Quelle est la charge de cet ion et son ordre de liaison, sachant que le numéro atomique du carbone, Z, vaut 6 ?

→ Ordre de liaison = $(\#e^- \text{liant} - \#e^- \text{anti-liant}) \cdot \frac{1}{2} = 3$

⇒ $n = 2$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 3 *(20 points)*

Six propositions de structures de Lewis de l'ion OCN^- (ion cyanate) sont représentées ci-dessous. Parmi elles, on vous demande d'indiquer celles qui sont incorrectes en justifiant brièvement votre choix.

a) Pour celles qui sont **correctes**, on vous demande de préciser la charge formelle ainsi que l'hybridation des différents atomes. Le carbone est dans le groupe principal IVa, l'azote dans le groupe principal Va, et l'oxygène dans le groupe principal VIa.

		Correcte ? Oui/Non	Justification (si structure incorrecte)	Charge formelle / Hybridation		
				O	C	N
A	$[\langle O=C\equiv N\vert]^-$	X	Viole règle de LEWIS	/	/	/
B	$[\langle O=C=N\rangle]^-$	V	+ règle des charges formelles			
C	$[\vert\underline{\overline{O}}-C\equiv N\vert]^-$	V		Trouver de l'hybridation	+	Calcul de charge formelle
D	$[\vert O\equiv C-\underline{\overline{N}}\vert]^-$	V				
E	$[\langle O=\overline{C}-\underline{\overline{N}}\vert]^-$	X		/		
F	$[\vert\underline{\overline{O}}-\overline{C}=N\rangle]^-$	X		/	/	/

b) Grâce aux structures correctes sélectionnées, déduisez la géométrie de l'ion cyanate, en justifiant votre choix.

→ Géométrie linéaire

→ Justification via Calcule des charges formelles

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 4 *(15 points)*

Soit les trois corps purs suivants : H_2O, H_2S et CO_2. On vous demande :

a) d'énumérer dans un tableau les différents types d'interactions qui s'exercent entre molécules pour chacun de ces trois corps purs pris séparément ;

b) sur cette base, de classer ces trois corps purs par température d'ébullition croissante.

Ia	IVa	VIa
Z=1 **H** χ=2,20	Z=6 **C** χ=2,60	Z=8 **O** χ=3,50
		Z=16 **S** χ=2,60

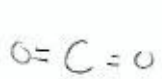
a) H_2O : - liens H
- moment dipolaire permanent
- dp - dp
- dp - di
- di - di



H_2S : - dp - dp
- dp - di
- di - di



CO_2 : - di - di
- double liaison



b) H_2S < CO_2 < H_2O

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 5 *(20 points)*

a) On vous demande de compléter les équations chimiques ci-dessous ainsi que de nommer le type d'énergie impliquée pour chaque transformation.

$O(g) + e^- \rightarrow O^-(g)$	$\Delta_r H^\circ_1$ = - énergie d'affinité électronique de O(g)
$Mg(s) \rightarrow Mg(g)$	$\Delta_r H^\circ_2$ = + enthalpie de sublimation du magnésium
$Mg^+(g) \rightarrow 1e^- + Mg^{2+}(g)$	$\Delta_r H^\circ_3$ = + énergie d'ionisation électronique de $Mg^+(g)$
$O_2(g) \rightarrow 2O(g)$	$\Delta_r H^\circ_4$ = + énergie de liaison d'O_2(g)
$O^-(g) + e^- \rightarrow O^{2-}(g)$	$\Delta_r H^\circ_5$ = - énergie d'affinité électronique de O^-(g)
$Mg(g) \rightarrow 1e^- + Mg^+(g)$	$\Delta_r H^\circ_6$ = + énergie d'ionisation électronique de Mg(g)
$Mg(s) + O_2(g) \rightarrow MgO(s)$	$\Delta_r H^\circ_7$ = + enthalpie de formation de MgO(s)

b) En combinant ces équations selon la loi de Hess, donnez l'expression du $\Delta_r H^\circ$ de la réaction suivante (énergie de réseau de MgO(s)) en termes de $\Delta_r H^\circ_1$, $\Delta_r H^\circ_2$, $\Delta_r H^\circ_3$, $\Delta_r H^\circ_4$, $\Delta_r H^\circ_5$, $\Delta_r H^\circ_6$ et $\Delta_r H^\circ_7$:

$$MgO(s) \rightarrow Mg^{2+}(g) + O^{2-}(g)$$

$$\Delta_{Reac} H^\circ = -\Delta_r H^\circ_7 + \Delta_r H^\circ_2 + \frac{1}{2}\Delta_r H^\circ_4 + \Delta_r H^\circ_6 + \Delta_r H^\circ_3 - \Delta_r H^\circ_1 - \Delta_r H^\circ_5$$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 6 *(15 points)*

a) Une réaction exothermique est-elle toujours spontanée à température et pression constantes ? Justifiez votre réponse.

→ Exothermique implique un $\Delta_r H$ négatif, car c'est le $\Delta_r G$ qui indique la spontanéité. $\Delta_r G = \Delta_r H - T\Delta_r S$

Donc, un $\Delta_r H$ < 0 n'implique pas forcément une réaction spontanée

b) Qu'est-ce que la température d'inversion ? Quelle est son expression mathématique ?

→ Le concept est basé sur le $\Delta_r G$. En effet, il s'agit de la température limite entre une réaction totale ou partielle (qualitativ)

→ Se calcule à $\Delta_r G^\circ = 0 = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$ (à 1 mol)

c) Que vaut la capacité calorifique à pression constante de I_2 à haute température (considérez que le gaz est parfait) ? Justifiez.

→ I_2 = gaz diatomique ⇒ $C_p = \frac{7}{2}R$

$P.V = nRT$

$C_p - C_V = nR$ ⇔ $C_V^{g.p.} = \frac{5}{2}R$ → démonstration au cours

(à n=1, diatomique)

d) Combien d'atomes ou d'ions y a-t-il par maille élémentaire dans le système cubique centré ?

2

e) Pour un solide monoatomique cristallisant dans le système cubique à faces centrées, quelle est l'équation reliant le paramètre de maille *a* et le rayon de l'atome *r* ? Détaillez votre réponse, éventuellement à l'aide d'un schéma.

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 7 *(10 points)*

Indiquez la seule réponse correcte à chacune des questions à choix multiples ci-dessous en noircissant la case correspondante.

Pondération : réponse valide: 2 points ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : - 1 point !

a) Considérons un diagramme de Lennard-Jones représentant les interactions intermoléculaires de van der Waals. Le puits de potentiel de la molécule de CH_4

- O est plus profond que celui de la molécule de H_2O.
- ⊗ est moins profond que celui de la molécule de H_2O.
- O a la même profondeur que celui de la molécule de H_2O.
- O n'existe pas.

b) Considérons les atomes $^{72}_{30}Zn$, $^{75}_{33}As$, $^{74}_{32}Ge$. Ces atomes ont :

- O le même nombre d'électrons.
- O le même nombre de protons.
- ⊗ le même nombre de neutrons.
- O le même nombre de protons et le même nombre de neutrons.
- O la même masse.

c) L'atome ayant la configuration $4s^2\ 4p^5$ de sa coque valencielle se trouve :

- O dans le groupe VIA et la période 5.
- O dans le groupe IVB et la période 4.
- O dans le groupe VIB et la période 7.
- ⊗ dans le groupe VIIA et la période 4.
- O dans le groupe VIIB et la période 4.

d) Le carbonate de calcium est un solide

- ⊗ ionique.
- O covalent.
- O moléculaire.
- O métallique.

e) Quel(s) changement(s) d'état est (sont) endothermique(s) ?

1. Fusion 2. Sublimation 3. Vaporisation 4. Condensation 5. Solidification

- ⊗ uniquement 1 et 2 et 3.
- O uniquement 4 et 5.
- O uniquement 1.
- O uniquement 2 et 3 et 5.
- O une autre combinaison.



ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2016/2017

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 9 janvier 2017

II. Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

Votre assistante s'est préparé des escargots à l'ail et a décidé de ne pas jeter les coquilles. Après les avoir lavées consciencieusement et laissées sécher plusieurs heures, elle les apporte au laboratoire et vous demande de déterminer la fraction massique en carbonate de calcium dans les coquilles. Lors de la manipulation, vous dissolvez 1,745 g de coquilles dans 20,0 mL d'une solution de chlorure d'hydrogène 3,55 mol/L. La dissolution est totale et on suppose que seul le carbonate de calcium réagit avec l'acide. Au cours de cette réaction, du dioxyde de carbone et de l'eau sont formés. Vous titrez ensuite l'excès d'acide par 25,2 mL d'une solution d'hydroxyde de potassium 2,00 mol/L. On demande :

a) d'écrire les équations moléculaires et ioniques nettes des deux réactions ;
b) de déterminer la fraction massique du carbonate de calcium dans les coquilles.

a) $CaCO_{3(s)} + 2HCl_{(aq)} \rightarrow H_2O_{(l)} + CO_{2(g)} + CaCl_{2(aq)}$

① $\hookrightarrow CO_3^{2-} + 2H^+ \rightarrow H_2O + CO_2$

② $HCl_{(aq)} + KOH_{(aq)} \rightleftharpoons KCl_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

$\hookrightarrow H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$

b) Excès de HCl titré par 25,2 ml de KOH 2,00 M

$\Leftrightarrow n_{KOH} = 25{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}00 = 50{,}4 \cdot 10^{-3}$ mol $= n_{HCl}$

→ Tableau d'avancement.

	$CaCO_3$	$2HCl$	H_2O	CO_2	$CaCl_2$
t_0	x	y	0	0	0
t_f	0	y − 2x	x	x	x

$\hookrightarrow$ y : 20 ml de HCl 3,55 M $\Leftrightarrow y - 2x = 50{,}4 \cdot 10^{-3}$ mol

→ On isole x = nombre de moles de $CaCO_3$ ...

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

L'huile de coco est composée en grande partie d'acides gras saturés, dont l'acide octanoïque ($C_8H_{16}O_2$), l'acide laurique ($C_{12}H_{24}O_2$) et l'acide myristique ($C_{14}H_{28}O_2$). Après combustion complète de 1,00 g de l'un de ces acides gras, on récupère, à 298 K et dans les conditions standard, 1,47 L de CO_2 et 1,07 g d'eau.

a) Déterminez duquel des trois acides gras il s'agit en justifiant votre réponse.

b) Sachant que la combustion d'une mole de cet acide gras libère 7377,0 kJ, calculez l'enthalpie de formation de ce dernier dans les conditions standard et à 298 K.

a) $X + aO_2 \rightarrow bCO_2 + cH_2O$

↳ Gn récupère : - 1,47 L de $CO_2 = V_{CO_2}$ ⇝ $P.V = nRT \Leftrightarrow n = \frac{P.V}{RT}$

- 1,07 g de $H_2O = m_{H_2O}$ ⇝ $n_{H_2O} \frac{m_{H_2O}}{MM_{H_2O}}$

⚠ P = 1 atm et T = 298 K

↳ $n_{H_2O} = 5,934\ 10^{-2}$ mol // $n_{CO_2} = 6,011 \cdot 10^{-2}$ mol

m = 1g :
- $MM_{C_8H_{16}O_2} = 144$ g/mol ⇔ $n = 1/144$ mol
- $MM_{C_{12}H_{24}O_2} = 200$ g/mol $n = 1/200$ mol
- $MM_{C_{14}H_{28}O_2} = 228$ g/mol $n = 1/228$ mol

↳ Étant donné que la réaction est complète, le coef. stœchiométrique du CO_2 (b) doit correspondre au nombre de C dans l'acide gras. Dès lors, il suffit de multiplier le nombre de mole d'acide gras par le nombre de carbone et de vérifier que l'on obtient bien le même nombre de mole.

⇒ $n_{C_{12}H_{24}O_2} = 5.10^{-3}$ mole * 12 ⇒ 6.10^{-2} moles = n_{CO_2} ☐

b) $\Delta_r H = 7377,0$ kJ $= b\Delta_f H_{CO_2} + c\Delta_f H_{H_2O} - a.\Delta_f H_{O_2} - \Delta_f H_{acide\ gras}$

↳ les $\Delta_f H$ des autres produits sont dans les tables

☐ Il suffit d'isoler $\Delta_f H_{acide\ gras}$ ⚠ Coef. stœch

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(15 points)*

Un espoir de production d'énergie repose sur la fusion contrôlée d'un noyau de deutérium (noyau d'hydrogène contenant 1 neutron) avec un noyau de tritium (noyau d'hydrogène contenant 2 neutrons), ce qui génère un noyau d'hélium. Le deutérium se trouve en abondance dans l'eau de mer où sa masse est estimée à $4{,}6 \times 10^{13}$ tonnes. On vous demande :

a) d'écrire la réaction de fusion équilibrée entre le deutérium et le tritium ;

b) de calculer l'énergie libérée par la réaction de fusion si 1,00 kg de deutérium est consommé.

Données : m(deutérium) = 2,01355 u ; m(tritium) = 3,01550 u ; m(hélium) = 4,00150 u

a) $Deu + Trit \rightarrow Hélium \Leftrightarrow {}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$

b) $E = \Delta m . c^2$

$\Leftrightarrow \Delta m = [m_{He} + m_n] - [m_{deu} + m_{Ti}]$ ou $m_n = 1,00866\ u$

$= -1,889 . 10^{-2}\ u = -3,13676 . 10^{-29}\ Kg$

$[1\ u = 1,6605 . 10^{-27}\ Kg]$

$\Leftrightarrow E = \Delta m . c^2 = -3,13676 . 10^{-29} . (3.10^8)^2 = -2,81932 . 10^{-12}\ J$

$= -17,60\ MeV$

Le Pour des noyaux simples

Δ 1 Kg de Deutérium !

$\Rightarrow n_{deu} = \frac{m_{2\,deu}}{MM_{deu}} = \frac{1000}{2,0} = 500$ moles

$\Leftrightarrow N_A = 6.10^{23}$ atomes dans 1 mole $\Leftrightarrow 3.10^{26}$ noyaux !

$\rightarrow$ Energie libérée $= 3.10^{26}\ 17,60 = 5,28.10^{27}\ MeV$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(15 points)*

En analysant un cristal de MgO(s) par diffraction aux rayons X, on trouve que l'angle correspondant au premier ordre de diffraction est égal à 21,44° pour le plan (200) quand les rayons X sont produits par une source de cuivre correspondant à une longueur d'onde λ égale à 1,54 Angström. Que vaudrait l'angle de diffraction au premier ordre si on utilisait une source de molybdène (λ = 71,07 pm) ?

↳ Loi de Bragg : $2d \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$

⇒ d = distance interréticulaire entre deux plans cristallographiques

↳ Celle-ci est connue

① $\lambda^{Cu} = 1,54\ \text{Å} = 1,54 \cdot 10^{-10}\ m$

$n = 1$

$\theta = 21,44°$

⇒ $d = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sin\theta} = 2,11 \cdot 10^{-10}\ m$

② $\lambda^{Mo} = 71,07\ pm = 71,07 \cdot 10^{-12}\ m$

$n = 1$

$d = 2,11 \cdot 10^{-10}\ m$

⇒ $\arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) = \theta = 9,69°$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(25 points)*

Sous une pression de 1 bar, on ajoute dans un récipient contenant 100,0 g d'eau liquide à 40 °C, une pièce en cuivre de 5,00 g à une température de 85 °C.

a) On vous demande de calculer la température après équilibre thermique.

b) On ajoute ensuite 20,0 g de glace à -5°C dans le récipient. Quelle est la température du système après équilibre thermique ?

Données : $C_{p,m}$(glace) = 38,09 J.mol^{-1}.K^{-1}, $\Delta_{fusion}H^0$ (glace) = 6,006 kJ/mol. Ces données sont supposées constantes dans les intervalles de température considérés.

Remarque : Vous pouvez supposer que la capacité calorifique du récipient ainsi que les pertes calorifiques sont négligeables.

↳ $Q = C_V \, m \, \Delta T$: Chaleur

a) Il faut considérer que toute l'énergie du cuivre est transmise à l'eau → $-C_p^{Cuivre} \cdot m_{molaire}^{cuivre} \cdot [T_f - 85°] = C_p^{Eau} \cdot m_{molaire}^{Eau} \cdot [T_f - 40°]$

↳ Le signe moins indique que l'énergie du cuivre est transmise

Il reste à isoler T_f. (C_p^{cuivre} sont dans les tables)

b) Même exercice, sauf qu'il faut considérer le fait que la glace fond

↳ 20,0 g de glace → MM = 18 g/mol ⇔ n_{glace} = 1,11 mol

Energie emmagasinée par la fusion : 1,11 . 6,006 kJ/mol

= 6,673 kJ

⇒ $-C_p^{glace} \cdot m_{molaire}^{glace} [T_f - (-5°)] + 6,673 \cdot 10^3 J = [C_p^{cuivre} \, m_{molaire}^{cuivre} + C_p^{eau} \, m_{molaire}^{eau}] \cdot [T_f - T_{f(a)}]$

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2016/2017

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 29 mai 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(15 points)*

L'eau de mer contient, entre autres, des ions Mg^{2+} dont la concentration vaut $6{,}00\times10^{-2}$ mol/L et des ions Ca^{2+} dont la concentration est égale à $1{,}10\times10^{-2}$ mol/L. Pour récupérer les ions magnésium, on les précipite sous forme d'hydroxyde $Mg(OH)_2$, en ajoutant une base forte à un volume donné d'eau de mer. On suppose les variations de volume négligeables.

a) En-dessous de quel pH faut-il maintenir la solution pour précipiter le plus d'ions magnésium possible, sans précipiter les ions calcium sous forme de $Ca(OH)_2$?

b) Dans ces conditions, quelle sera la concentration résiduelle en ions magnésium après précipitation ?

$Mg(OH)_2$: $K_s = 5{,}61\cdot10^{-12}$

$Ca(OH)_2$: $K_s = 4{,}68\cdot10^{-6}$

a) $Mg(OH)_{2(s)} \rightleftharpoons Mg^{2+}_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)}$ ①

$Ca(OH)_{2(s)} \rightleftharpoons Ca^{2+}_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)}$ ②

① $K = K_s = [Mg^{2+}][OH^-]^2 = 5{,}61\cdot10^{-12}$

$\Leftrightarrow [OH^-] = 9{,}67\cdot10^{-6}$ Mol/L → à cette concentration les ions Mg^{2+} précipitent

② $K = K_s = [Ca^{2+}][OH^-]^2 = 4{,}68\cdot10^{-6}$

$\Leftrightarrow [OH^-] = 2{,}0627\cdot10^{-2}$ Mol/L

Ld ① $[OH^-][H_3O^+] = 10^{-14} \Leftrightarrow [H_3O^+] = 4{,}848\cdot10^{-13}$

$pH = -\log[H_3O^+] =$ 12,31

b) $[Mg^{2+}]_{rés} = 1{,}378\cdot10^{-8}$ Mol/L

Examen de chimie - mai 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

On veut préparer 500 mL de solution tampon à pH = 7,50, de concentration en ion K^+ égale à 0,500 mol/L. On a à notre disposition de l'eau et les sels suivants : hydrogénophosphate de potassium et dihydrogénophosphate de potassium.

a) Écrivez les équations de dissociation de ces sels dans l'eau.
b) Quelle masse de chacun de ces sels doit-on utiliser pour obtenir la solution tampon voulue ?
c) On ajoute à ce tampon 100 mL d'une solution aqueuse de NaOH de concentration égale à 1,00 mol/L. Quel sera le pH de la solution finale ?

a) $KH_2PO_4 + 2H_2O \rightleftharpoons K^+ + PO_4^{3-} + 2H_3O^+ \quad K = K_{a2} \cdot K_{a3}$

$K_2HPO_4 + H_2O \rightleftharpoons 2K^+ + PO_4^{3-} + H_3O^+ \quad K = K_{a3}$

b) $pH = pK_a - \log\left(\frac{C_A}{C_B}\right)$

$= pK_{a2} - \log\left(\frac{m_{H_2PO_4^-}}{m_{HPO_4^{2-}}}\right)$ $\quad \begin{cases} K_{a2} = 6{,}34 \cdot 10^{-8} \\ K_{a3} = 2{,}2 \cdot 10^{-13} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{m_{H_2PO_4^-}}{m_{HPO_4^{2-}}} = 10^{pK_a - pH}$

$= 10^{7{,}3979 - 7{,}5} = 0{,}499$

$\Leftrightarrow m_{H_2PO_4^-} = 0{,}499\, m_{HPO_4^{2-}}$

$\Rightarrow m_{K^+} = [K^+] V_{K^+} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ mol

$m_{K_2HPO_4} + m_{KH_2PO_4} = 3m_{K^+}$

$= m_{HPO_4^{2-}} + m_{H_2PO_4^-}$

$m_{H_2PO_4^-} = \left[3m_{K^+} - m_{HPO_4^{2-}} = m_{HPO_4^{2-}} \cdot 0{,}499\right]$

$\Leftrightarrow m_{HPO_4^{2-}} = 0{,}500$ mol

$\Leftrightarrow m_{H_2PO_4^{2-}} = 0{,}250$ mol

QUESTION 2 *(suite)*

(1) $m_{K_2HPO_4} = m_{HPO_4^{2-}} \cdot MM_{K_2HPO_4}$

(2) $m_{KH_2PO_4} = m_{H_2PO_4^-} \cdot MM_{KH_2PO_4}$

C) $pH_{initial} = 7,50 \Leftrightarrow pH = -\log [H_3O^+]^{ini} \Leftrightarrow [H_3O^+]^{ini} = 10^{-pH}$

$= 3,16 \cdot 10^{-8}$ M

$[H_3O^+]^{ini} [OH^-]^{ini} = 10^{-14}$

$\Leftrightarrow [OH^-]^{ini} = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]^{ini}} = 3,16 \cdot 10^{-7}$ M

$\Leftrightarrow n_{OH^-}^{ini} = V_{solution\ initial} \cdot [OH^-]^{ini} = 1,58 \cdot 10^{-7}$ mol

+ 100 ml NaOH $[OH^-]$ 1,00 M $\Rightarrow n_{OH^-}^{ajoute} = V_{ajoute} \cdot 1,00 = 0,1$ mol

$NaOH \rightarrow Na^+ + OH^-$

$\Rightarrow n_{tot\ OH^-} = 0,1 + 1,58 \cdot 10^{-7} = 1,0 \cdot 10^{-1}$ mol

$V_{tot} = 600$ ml

$\Leftrightarrow [OH^-]^{final} = 1,66 \cdot 10^{-7}$ M

$\rightarrow pH = 14 + \log [OH^-]^{final}$

Examen de chimie - mai 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 3 *(25 points)*

Un étudiant doit préparer une pile au laboratoire. La température est maintenue constante à 298 K. Il dispose du matériel suivant, qu'il utilise dans son intégralité :

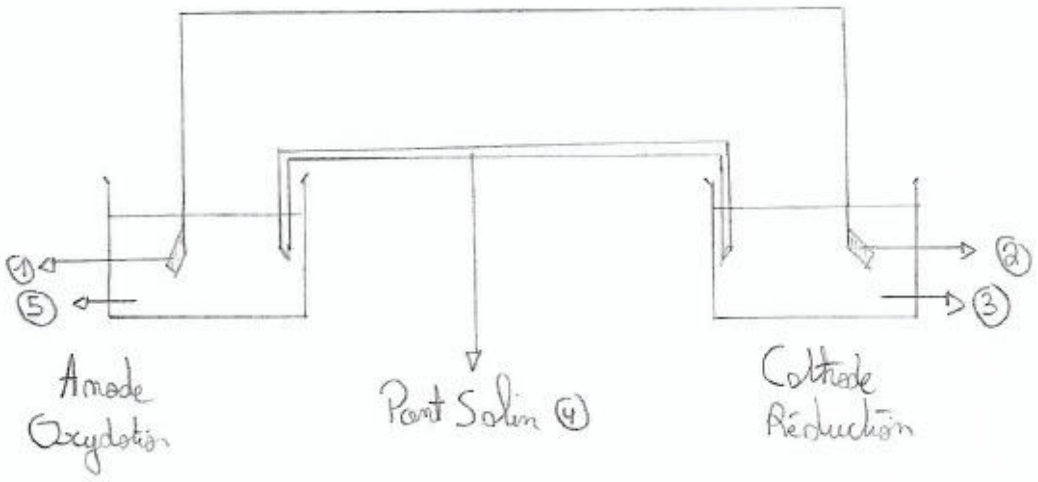
- une lamelle de cuivre de 5,00 g (1)
- une électrode de platine (2)
- 200 mL d'une solution aqueuse dont le pH vaut 2,00 et contenant du permanganate de potassium et du sulfate de manganèse, de concentrations égales respectivement à 0,300 mol/L et à 0,0750 mol/L (3)
- une solution aqueuse saturée en nitrate de potassium (4)
- 200 mL d'une solution aqueuse de sulfate de cuivre (II) de concentration égale à 0,300 mol/L (5)

a) Représentez le schéma de la pile en indiquant la position de l'anode et de la cathode. (*Justifiez votre réponse.*)

b) Écrivez l'équation ionique nette globale correspondant à la réaction chimique du fonctionnement de la pile et calculez la constante d'équilibre de celle-ci.

c) Que vaut la force électromotrice de cette pile ?

a)



b) Anode. $\left(Cu_{(s)} \rightleftharpoons Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^-\right) \times 5$ $[Cu^{2+}/Cu : E^\circ = 0{,}34V]$

Cathode. $\left(MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+_{(aq)} + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O_{(l)}\right) \times 2$ $[MnO_4^-/Mn^{2+} : E^\circ = 1{,}51]$

Somme

$\Rightarrow 5Cu_{(s)} + 2MnO_4^-{}_{(aq)} + 16H^+_{(aq)} \rightleftharpoons 5Cu^{2+}_{(aq)} + 2Mn^{2+}_{(aq)} + 8H_2O_{(l)}$

[Équation ionique nette globale]

$\rightarrow K = e^{\left(\frac{n.F\Delta E}{RT}\right)}$ $\rightsquigarrow$ Il faut donc recalculer notre ΔE

QUESTION 3 *(suite)*

$\Delta E^\circ = E^\circ_{cath} - E^\circ_{anode}$ $\Leftrightarrow$ $\Delta E = E_{cath} - E_{anode}$

$\Rightarrow$ Il faut utiliser Nernst pour chaque réaction.

$$E_{cath} = E^\circ_{cath} + \left(\frac{R\,T}{m\,\mathcal{F}}\right) \ln \frac{[M_n O_4^-]}{[M_n^{8+}]} \quad (n = 5)$$

$$E_{an} = E^\circ_{anode} + \left(\frac{R\,T}{n\,\mathcal{F}}\right) \ln \frac{[Cu^{2+}]}{1} \quad (n = 2)$$

$\Leftrightarrow$ $\Delta E = E_{cath} - E_{anode}$

$\Leftrightarrow$ $K = \text{constante} = e^{\left|\frac{n\mathcal{F}\Delta E}{RT}\right|}$

c) $\rightarrow$ $f\grave{e}.m_2 = \Delta E$

Examen de chimie - mai 2017

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 4 *(15 points)*

Au laboratoire, un étudiant de BA1 considère l'équilibre en phase gazeuse : $2\,HI(g) \rightleftharpoons I_2(g) + H_2(g)$. Le récipient ne contient initialement que de l'iodure d'hydrogène et la température est maintenue constante à 400 K. Le volume du récipient est maintenu constant et les gaz peuvent être considérés comme parfaits. À l'équilibre, la pression partielle en dihydrogène est égale à 3,10 bar.

a) Calculez la constante d'équilibre de cette réaction à 400 K. *(Les variations d'enthalpie $\Delta_r H^0$ et d'entropie $\Delta_r S^0$ de la réaction peuvent être évaluées à 298 K.)*

b) Calculez la pression initiale dans le récipient ainsi que la pression totale à l'équilibre.

=D $2HI(g) \rightleftharpoons I_2(g) + H_2(g)$

a) $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T.\Delta_r S^\circ$ -D | T = 400 K ; $\Delta_r H^\circ$, $\Delta_r S^\circ$] obtenus à partir des tabl

$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ_{I_2} + \Delta_f H^\circ_{H_2} - 2\Delta_f H^\circ_{HI}$

$\Delta_r S^\circ = S^\circ_{I_2} + S^\circ_{H_2} - 2S^\circ_{HI}$

<=D $\Delta_r G^\circ$ peut désormais être calculé

<=D $\Delta_r G^\circ = -RT\ln K$ <=D $K = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}}$

b) -D P_{gaz} considérés comme parfait

LD Équilibre $P_{tot} = P_{I_2} + P_{H_2} + 2P_{HI}$ <=D $P_{I_2} = P_{H_2}$

$K = \frac{[I_2][H_2]}{[HI]^2} = \frac{P_{I_2}.P_{H_2}}{(P_{HI})^2}$ <=D $P_{HI} = \sqrt{\frac{P_{I_2}P_{H_2}}{K}}$

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 7

QUESTION 5 *(20 points)*

Dans son laboratoire, un chercheur étudie l'oxydation complète du toluène par l'oxygène en présence d'un catalyseur à base de cobalt, d'aluminium et de cérium (Co-Al-Ce) :

$$C_6H_5CH_3(g) + 9\,O_2(g) \xrightarrow{\text{Catalyseur}} 7\,CO_2(g) + 4\,H_2O\,(g)$$

La vitesse de la réaction ne dépend que de la quantité en toluène. Le chercheur compare deux catalyseurs prometteurs, le $Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}$ et le Co_6Al_2. Le tableau ci-dessous reprend ses résultats pour le premier catalyseur :

Température T (°C)	182,0	205,0	217,0	237,0	253,0
Constante cinétique k (h^{-1})	22,8	62,6	102,3	220,1	389,5

a) Déterminez graphiquement l'énergie d'activation de la réaction en présence du premier catalyseur, $E_a^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$. Dans ces conditions, trouvez le facteur pré-exponentiel de l'équation d'Arrhenius, $A^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$.

b) L'étude cinétique du second catalyseur donne les résultats suivants : $E_a^{Co_6Al_2} = 84{,}70$ kJ/mol et $A^{Co_6Al_2} = 6{,}43\times10^8\ h^{-1}$. Avec quel catalyseur l'oxydation est-elle la plus rapide ? (*Justifiez votre réponse.*)

c) Que vaut la vitesse initiale d'oxydation à 205,0 °C avec le premier catalyseur si la pression initiale en toluène est de 1,50 bar ? Après combien de temps 90% de la quantité initiale de toluène seront-ils consommés à cette température ?

Examen de chimie - mai 2017

NOM, Prénom:.....

Section et numéro de matricule :..... 7

QUESTION 5 *(20 points)*

Dans son laboratoire, un chercheur étudie l'oxydation complète du toluène par l'oxygène en présence d'un catalyseur à base de cobalt, d'aluminium et de cérium (Co-Al-Ce) :

$$C_6H_5CH_3(g) + 9\,O_2(g) \xrightarrow{\text{Catalyseur}} 7\,CO_2(g) + 4\,H_2O\,(g)$$

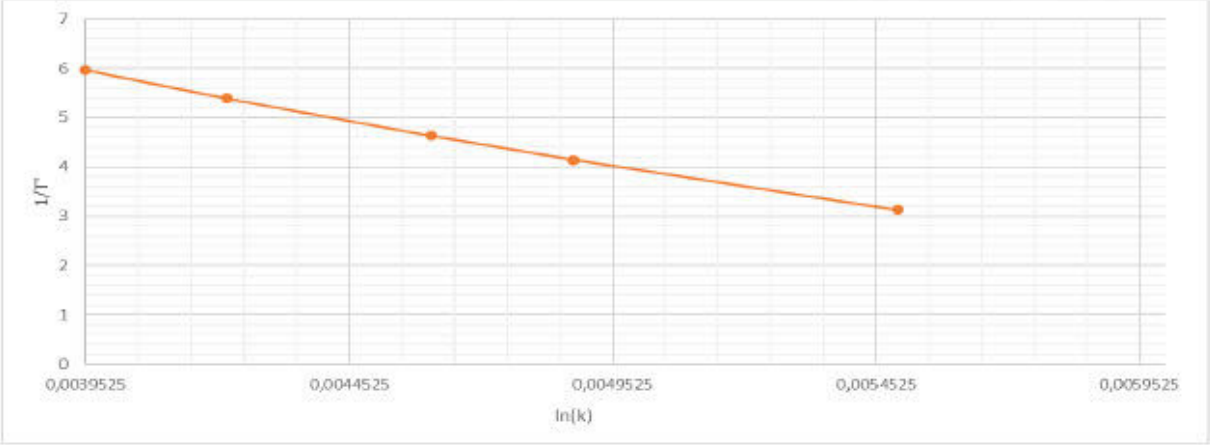
La vitesse de la réaction ne dépend que de la quantité en toluène. Le chercheur compare deux catalyseurs prometteurs, le $Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}$ et le Co_6Al_2. Le tableau ci-dessous reprend ses résultats pour le premier catalyseur :

Température T (°C)	182,0	205,0	217,0	237,0	253,0
Constante cinétique k (h^{-1})	22,8	62,6	102,3	220,1	389,5

a) Déterminez graphiquement l'énergie d'activation de la réaction en présence du premier catalyseur, $E_a^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$. Dans ces conditions, trouvez le facteur pré-exponentiel de l'équation d'Arrhenius, $A^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$.

b) L'étude cinétique du second catalyseur donne les résultats suivants : $E_a^{Co_6Al_2} = 84{,}70$ kJ/mol et $A^{Co_6Al_2} = 6{,}43\times10^8\ h^{-1}$. Avec quel catalyseur l'oxydation est-elle la plus rapide ? (*Justifiez votre réponse.*)

c) Que vaut la vitesse initiale d'oxydation à 205,0 °C avec le premier catalyseur si la pression initiale en toluène est de 1,50 bar ? Après combien de temps 90% de la quantité initiale de toluène seront-ils consommés à cette température ?



Loi d'Arrhenius : $k = A.e^{\frac{-E}{RT}}$

a) Pour effectuer le graphique, il faut d'abord recalculer l'inverse de la température ainsi que le ln de K car : $\frac{dln(k)}{dT} = \frac{E}{RT}$

La pente de la droite obtenue nous donne le facteur $-\frac{E}{R}$,tandis que l'ordonnée à l'origine nous donne le facteur ln(A).

b) Pour comparer l'efficacité entre les deux catalyseurs, il suffit de calculer les constantes cinétique et de les comparer, la plus élevée impliquera la vitesse la plus élevée.

c) La vitesse ne dépend que de la quantité en toluène

Vitesse = k . [toluène]

Mun Chimie Mai 2017

①

Q1 a) $[Mg^{2+}] = 6,1.10^{-2}$ mol/L

$[Ca^{2+}] = 1.10^{-2}$ mol/L

① $Mg^{2+}_{(aq)} + 2\,OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons Mg(OH)_{2\,(s)}$

$K_S = [Mg^{2+}].[OH^-]^2 \rightarrow [OH^-] = \sqrt{\frac{K_S}{[Mg^{2+}]}} = 9,67.10^{-6}$ mol/L

$pH = 14 + \log[OH^-] = 8,98$

② $Ca^{2+}_{(aq)} + 2\,OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons Ca(OH)_{2\,(s)}$

$K_S = [Ca^{2+}][OH^-]^2 \rightarrow [OH^-] = \sqrt{\frac{K_S}{[Ca^{2+}]}} = 0,026$ mol/L

$pH = 14 + \log[OH^-] = 12,3$

il faut avoir un pH de 12,3 pour qu'on précipite seulement $Mg(OH)_2$ car il faut un pH de + 12,3 pour faire précipiter le $Ca(OH)_2$.

b) En prenant compte du pH = 12,3 donc $[OH^-] = 0,026$ m

$\Rightarrow [Mg^{2+}] = \frac{K_S}{[OH^-]^2} = 1,32.10^{-8}$ mol/L

Q2

a) $KH_2PO_4(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons K^+(aq) + HPO_4^{2-}(aq) + H_3O^+(aq)$ K_{A2}

$HPO_4^{2-}(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons PO_4^{3-}(aq) + H_3O^+(aq)$ K_{A3}

---

① $KH_2PO_4(aq) + 2H_2O(l) \rightleftharpoons K^+(aq) + PO_4^{3-}(aq) + 2H_3O^+(aq)$ $K_T = K_{A2} \cdot K_{A3}$

② $K_2HPO_4(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons 2K^+(aq) + PO_4^{3-}(aq) + H_3O^+(aq)$ K_{A3}

b) $pH = -\log[H_3O^+] \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-7,50}$

$\rightarrow [H_3O^+] = K_{A2} \cdot \frac{Ca}{Cb}$ $\xrightarrow{V_E \text{ identique}}$ $[H_3O^+] = K_{A2} \cdot \frac{na}{nb}$

ici $na = n_{H_2PO_4^-}$ et $nb = n_{HPO_4^{2-}}$

$\rightarrow \frac{na}{nb} = \frac{[H_3O^+]}{K_{A2}} \Rightarrow \frac{na}{nb} = 0,499 \Rightarrow na = 0,499 \cdot nb$

$\rightarrow n_{H_2PO_4^-} = 0,499\, n_{HPO_4^{2-}}$

on additionne ① et ②

$n_{K^+} = C \cdot V = 0,5 \cdot 0,5$

$n_{H_2PO_4^-} + n_{HPO_4^{2-}} = 3n_{K^+}$

$\rightarrow 0,499\, n_{HPO_4^{2-}} + n_{HPO_4^{2-}} = 3n_{K^+} \Rightarrow n_{HPO_4^{2-}} = \frac{3n_{K^+}}{1,499} = 0,5 \text{ mol}$

$\Rightarrow n_{H_2PO_4^-} = 0,5 \cdot 0,499 = 0,25$

$m_{K_2HPO_4} = n_{HPO_4^{2-}} \cdot \Pi\Pi_{K_2HPO_4} = 87,1\ g$

$m_{KH_2PO_4} = n_{H_2PO_4^-} \cdot \Pi\Pi_{KH_2PO_4} = 34,02\ g$

MVM

Chimie Mai 2017

②

Q2

c) Si on ajoute NaOH qui est une base alors $C_b \nearrow$ et $C_a \searrow$

$n_{NaOH} = C.V = 1 . 0,1 = 0,1$ mol

$n'_a = 0,250 - 0,1 = 0,150$ mol

$n'_b = 0,500 + 0,1 = 0,600$ mol

$V'_t = 0,500 + 0,100 = 0,600$ L

$\Rightarrow [H_3O^+] = K_{A_2} \cdot \frac{C_a}{C_b}$ où $C_a = n'_A . V'_t$ et $C_b = n'_b . V'_t$

$\Rightarrow pH = pK_{A_2} - \log\left(\frac{C_a}{C_b}\right) = 7,80$

Q3

a) $Cu(s) \left| \begin{array}{l} Cu^{2+}_{(aq)} \text{ à } 0,300\,M \\ V = 0,2\,L \end{array} \right\| \begin{array}{l} KMnO_4 \text{ à } 0,300\,M \\ MnSO_4 \text{ à } 0,075\,M \\ pH = 2 \text{ et } V = 0,2 \end{array} \left| Pt(s) \right.$

Anode — Pont Salin — Cathode

Le couple qui va à la cathode est le couple rédox possédant un ΔE° plus élevé que l'autre couple. Ici le couple MnO_4^-/Mn^{2+} a un $\Delta E^\circ = 1,507$ V et le couple Cu^{2+}/Cu à un $\Delta E^\circ = 0,342$ V donc c'est normal de mettre le couple MnO_4^-/Mn^{2+} à la cathode car il a un ΔE° plus élevé que celui du couple Cu^{2+}/Cu

b)

$(MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+}(aq) + 4H_2O(l)) \times 2$

$(Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Cu(s)) \times 5$

éq. globale : $2MnO_4^-(aq) + 5Cu(s) + 16H^+(aq) \rightleftharpoons 5Cu^{2+}(aq) + 2Mn^{2+}(aq) + 8H_2O(l)$

$K = e^{\left(\frac{nF.\Delta E}{RT}\right)}$

on a pas le ΔE. Du coup, il faut le calculer

$\Delta E = \Delta E_{cath} - \Delta E_{anode}$

$\Delta E_{cath} = E^\circ_{MnO_4^-/Mn^{2+}} - \frac{RT}{nF} \cdot \ln\left(\frac{[Mn^{2+}]}{[MnO_4^-] \cdot [H^+]^8}\right)$ $\quad [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2}$

$= 1,32V$

$\Delta E_{Anode} = E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} - \frac{RT}{nF} \cdot \ln\left(\frac{1}{[Cu^{2+}]}\right)$

$= 0,327V$

$\Rightarrow \Delta E = 0,993V$

$\Rightarrow K = e^{\left(\frac{10 \cdot 96485 \cdot 0,993}{8,314 \cdot 298}\right)} = 8,83 \cdot 10^{167}$

c) $\Delta E = f.ém$

$f.ém = 0,993V$

MVN

Chimie Mai 2017

③

Q4

a) $2\,HI_{(g)} \rightleftharpoons I_{2(g)} + H_{2(g)}$

$\Delta H = \Delta f H_{I_{2(g)}} + \Delta f H_{H_{2(g)}} - 2\,\Delta f H_{HI_{(g)}} = 9{,}48\ KJ/mol$

$\Delta S = \Delta f S_{I_{2(g)}} + \Delta f S_{H_{2(g)}} - 2\,\Delta f S_{HI_{(g)}} = -22{,}33\ J/mol\,k$

$G = \Delta H - T\Delta S$ à $T = 400k$

$= 17\,956\ J/mol$

$K = e^{-\frac{\Delta G}{RT}} = 4{,}52 \cdot 10^{-3}$

b)

	$2\,HI_{(g)}$	$\rightleftharpoons$	$I_{2(g)}$	+	$H_{2(g)}$
P_i	P_i		0		0
$P_{\rightleftharpoons}$	$P_i - x$		x		x

on sait que $P_{H_2 \rightleftharpoons}$ vaut 3,10 bar donc $x = 3{,}10$

$K_P = K = \frac{P_{I_2} \cdot P_{H_2}}{P_{HI}^2} \Rightarrow P_{HI}^2 = \frac{P_{I_2} \cdot P_{H_2}}{K}$

$\Rightarrow (P_i - 3{,}10)^2 = \frac{3{,}10 \cdot 3{,}10}{4{,}52 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow |P_i - 3{,}10| = 46{,}11$

$\Rightarrow P_i = 46{,}11 + 3{,}10 \Rightarrow P_i = 49{,}21$ bar.

$P_{tot_{\rightleftharpoons}} = P_{I_{2\rightleftharpoons}} + P_{H_{2\rightleftharpoons}} + 2\,P_{HI_{\rightleftharpoons}} = 52{,}31$ bar

Q5 a) et $[k] = t^{-1}$

on nous dit que $V = k \cdot P_{\text{toluène}}$ donc cela veut dire qu'on a une réaction d'ordre 1.

$$\underbrace{\ln k}_{\text{AXE } y} = \underbrace{\ln A}_{\text{ordonnée à l'origine}} - \underbrace{\frac{E_A}{R}}_{\text{pente}} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{AXE } x}$$

Donc on va faire un graphique qui porte $\ln k$ en fonction de $\frac{1}{T}$. La pente nous donnera $-\frac{E_A}{R}$. Du coup, on pourra trouver E_A

$$\frac{\ln k_{\text{à } 253°C} - \ln k_{\text{à } 142°C}}{\frac{1}{526} - \frac{1}{455}} = C.A. \Rightarrow C.A = -9566,81\ K^{-1}$$

$$\Rightarrow C_A = \frac{-E_A}{R} \rightarrow \frac{-E_A}{R} = -9566,81\ K^{-1} \rightarrow E_A = 79,54\ kJ/mol$$

*

b) $k_{CoGAl_2} = e^{-\frac{E_A}{RT}} \cdot A$ à $T = 205\ °C$

$= 0,36\ h^{-1}$

à 205°C le $k_{CoGAl_{1,2}Ce_{0,4}}$ est de $k = 62,6\ h^{-1}$

étant donné que le k du premier catalyseur est plus grand que le second du coup c'est lui le plus rapide.

* $\ln k = \ln A - \frac{E_A}{RT}$ (T → 205°C) $\rightarrow \ln k + \frac{E_A}{RT} = \ln A \rightarrow A = 3,082 \cdot 10^{10}\ h^{-1}$

c) $\ln P_{At} = \ln P_{A0} - kt \rightarrow t = \ln P_{At} - \ln P_{A0} \cdot \frac{-1}{k}$ (k → 205°C)

$P_{At} = 10\% \cdot P_{A0} = 0,15$ $\quad t = 0,037\ h = 133,2\ s$

$v = k \cdot P_{A0} \rightarrow v = 93,9\ bar/h$

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 8 janvier 2018

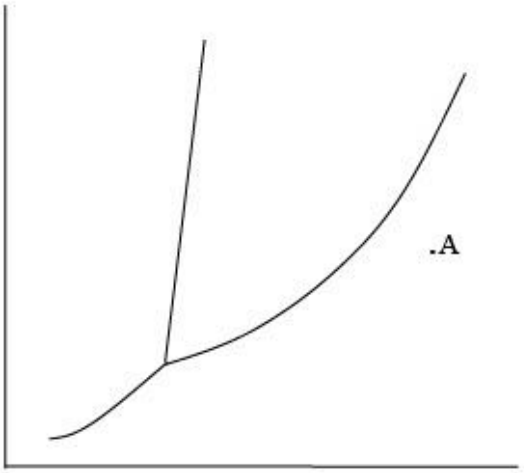
Première partie - Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points).*

Soit le diagramme de phases d'un corps pur X :



Complétez ⇒

	symbole	Unité (MKS)
ordonnée		
abscisse		

a) Indiquez sur ce diagramme les phases solide, liquide, et gaz, par les lettres S, L, G, respectivement.

b) Indiquez par une flèche la courbe d'équilibre liquide – gaz.

c) Écrivez l'équation mathématique décrivant cette courbe.

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 1 *(suite)*

d) Ce diagramme implique un rapport de densités entre les phases solide et liquide ; lequel ? Barrez ce qui est faux et justifiez votre réponse.

$d_S > d_L$ $d_L > d_S$

e) Placez sur le graphe un point B : ce point doit correspondre à un équilibre de phases et être tel que le trajet de A à B (tracez-le) soit une isobare sur laquelle se situent deux changements d'états.

f) Écrivez la formule la plus générale de la variance, et appliquez-la aux courbes tracées ainsi qu'au point triple en explicitant la valeur prise par chaque terme dans la formule.

formule générale ⇒ .....
courbes ⇒ .....
point triple ⇒ .....

g) Représentez (sur le graphe) par un pointillé ce que devient ce diagramme si l'on réalise un mélange homogène du corps X (volatil) avec une petite quantité d'un soluté non volatil.

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 08 janvier 2018 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 2 *(20 points)*

Sachant que le chlore et l'iode sont des halogènes dont les nombres atomiques Z valent respectivement 17 et 53 :

a) Ecrivez la structure électronique de l'atome de chlore dans son état fondamental :

b) Complétez le tableau suivant :

	ICl_4^-	IO_4^-
Structure de Lewis		
Résonance	OUI / NON	OUI / NON
Charges formelles (labellisez clairement les différents atomes)		

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 3 *(20 points)*

Les hydrures métalliques sont une source d'hydrogène intéressante pour les piles à combustible, qui pourraient à terme remplacer les moteurs à explosion actuels. Afin d'étudier les propriétés de l'un d'entre eux, 250 g de $LiBH_4(s)$ sont placés dans un réacteur *isolé et indéformable* de volume *V*, en présence de carbone graphite. La réaction endothermique entre les deux solides mène à la formation de dihydrogène et de LiBC(s).

a) Ecrivez l'équation stœchiométrique équilibrée de la réaction.

b) La température en fin de réaction est-elle inférieure, supérieure ou identique à la température initiale ? Justifiez.

c) L'énergie interne en fin de réaction est-elle inférieure, supérieure ou identique à sa valeur initiale ? Justifiez.

d) Si la réaction avait été effectuée dans un réacteur à *pression* constante, aurait-elle été plus endothermique, moins endothermique, ou la chaleur de réaction aurait-elle été la même ? Justifiez.

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 08 janvier 2018 – Théorie

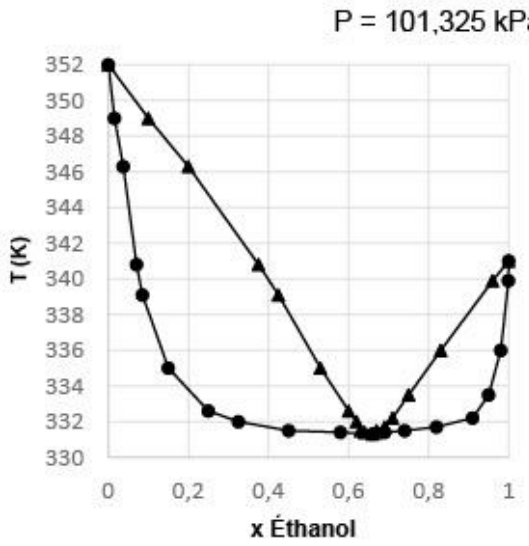
NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 4 *(20 points)*

Soit le diagramme de phases décrivant l'équilibre liquide-vapeur du mélange éthanol-hexane.

a) La mélange éthanol/hexane constitue-t-il une solution idéale ? Justifiez en termes d'interactions intermoléculaires en cochant dans le tableau ci-dessous les interactions pertinentes.
(DI = dipôle induit, DP = dipôle permanent, LH = lien hydrogène).



Substance	DI-DI	DP-DP	LH
éthanol			
hexane			

Conclusion : ceci est/n'est pas une solution idéale (barrer la mention incorrecte)

QUESTION 4 *(suite)*

b) Choix multiples à réponse unique ; justifiez votre choix en une phrase ! ***Attention : un choix sans justification correcte implique la nullité de la réponse.***

- Ce graphe représente
  - des courbes isothermes.
  - des courbes isobares.
  - un azéotrope à maximum.
  - un eutectique.
  - Aucune des propositions.

Justification :

- La température d'ébullition de l'éthanol pur est égale à
  - 331,8 K.
  - 341 K.
  - 352 K.
  - Aucune des propositions.

Justification :

- Si on distille un mélange composé de 80% d'éthanol, la fraction de tête sera composée
  - d'azéotrope.
  - d'éthanol pur.
  - d'hexane pur.
  - Aucune des propositions.

Justification :

- Si on distille un mélange composé de 80% d'hexane, la fraction de queue sera composée
  - d'éthanol pur.
  - d'hexane pur.
  - d'un mélange 0,65/0,35 éthanol/hexane.
  - Aucune des propositions.

Justification :

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 08 janvier 2018 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 7

QUESTION 5 *(5 points)*

Les gaz nobles présentent les paramètres « a » de van der Waals suivants :

	a ($atm \cdot L^2 \cdot mol^{-2}$)
He	0,0346
Ne	0,208
Ar	1,355
Kr	5,193
Xe	4,192

Soient 5 échantillons différents, contenant chacun une quantité identique n de l'un de ces gaz. En vous basant uniquement sur le paramètre « a », quel gaz exercera la pression la plus élevée ? Justifiez en 3 lignes maximum.

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 08 janvier 2018 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 8

QUESTION 6 *(10 points)*

Les lois ébullioscopique et cryoscopique prennent la forme suivante :
$\Delta T = \nu K m$ (avec m = molalité)
En solution aqueuse, que vaut ν (théorique) pour :
$CaCl_2$:
KCl :
Justifiez en trois lignes maximum.

D'autre part, la constante K dépend de (entourez la bonne réponse) :
Attention, entourer une réponse incorrecte = perte de points

- La nature du soluté

- la nature du solvant

- la quantité de soluté

- la quantité de solvant

- la nature des interactions solvant-soluté

- l'âge du capitaine

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 8 janvier 2018

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points)*

Lors d'un voyage scientifique, du butane (C_4H_{10}) a été transporté à -63,15°C. Quelle est la pression de vapeur du butane à cette température sachant que, à pression normale, sa température d'ébullition est de -0,5°C, et que son enthalpie de vaporisation vaut 22,389 $kJ \cdot mol^{-1}$?

Une partie de ce butane a été utilisée sous sa forme gazeuse et mélangée à du propane (C_3H_8) gazeux. Après avoir effectué, en présence de dioxygène, la combustion de 0,7310 g du mélange des deux gaz, la réaction libère 1,245 L de CO_2 à 21,00°C sous 740,0 mmHg.
Quelle était la masse de butane dans l'échantillon initial ?
Quelle sera la masse d'eau libérée ?
Quel a été le volume de dioxygène (mesuré dans les conditions normales de température et pression) utilisé ?
Conseil : pour résoudre cette question, nous vous conseillons de garder le maximum possible de chiffres significatifs dans vos calculs.

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : .....

QUESTION 2 *(25 points)*

Le carbone est constitué de plusieurs isotopes (^{12}C, ^{13}C,^{14}C) dont certains sont radioactifs. Sachant que la demi-vie de l'isotope 14 du carbone est de 5730 années, le chimiste américain Libby a développé la méthode de datation dite « au carbone 14 ». En dosant la radioactivité libérée par un échantillon contenant des fibres végétales, il est possible de dater ce dernier, c'est-à-dire d'estimer quand il a été fabriqué. En effet, on suppose que la fibre végétale s'est construite par extraction du carbone (CO_2) de l'atmosphère, via la photosynthèse, et que le rapport $^{14}C/^{12}C$ est resté décemment constant dans l'atmosphère au cours des siècles (ceci a été validé par d'autres méthodes). Il a été mesuré que le ^{14}C dans un organisme vivant avait une activité spécifique de 15,3 désintégrations par minute, par gramme de carbone total, ce qui correspond à 0,255 Bq/g (le Becquerel, ou Bq, est l'unité de mesure de radioactivité).

Des archéologues ont retrouvé un outil en bois, préservé de l'oxydation et de l'humidité, et donc intact. Ils l'ont confié à un chimiste responsable d'un laboratoire d'analyse de traces. La radioactivité émise par cet outil est de 0,195 Bq/g. Quand cet outil a-t-il été fabriqué ?

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(25 points)*

Un élément crucial dans la survie du personnage incarné par Matt Damon dans le récent film de Ridley Scott est l'utilisation de l'hydrazine (N_2H_4) sous forme liquide comme carburant de fusée afin de produire de l'eau. En effet, l'hydrazine se dissocie à la surface d'un catalyseur métallique en diazote et en dihydrogène gazeux. La combustion du dihydrogène récolté produit de l'eau, indispensable à la vie et à la production de denrées alimentaires.

a) Calculez la chaleur de combustion isochore associée à la production de 1 kg d'eau (liquide, à 25 °C) à partir de dihydrogène et de dioxygène gazeux.

b) Calculez l'augmentation de température qui résulterait de cette production dans l'habitacle initialement à 298 K, si la chaleur spécifique de l'atmosphère artificielle à volume constant y est égale à 0,718 $kJ.kg^{-1}.K^{-1}$.

c) A votre avis, l'hypothèse formulée dans le film, et compte tenu des hypothèses de calcul présentées ici, est-elle crédible ?

(Négligez l'énergie libérée lors de la dissociation de l'hydrazine ; considérez un rendement de 100%, une chaleur de réaction et une chaleur spécifique inchangées suite à l'augmentation de température initialement à 298 K, et un habitacle de 50 m^3 d'air.)

ρ_{air} (298K) = 1,184 $kg.m^{-3}$

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

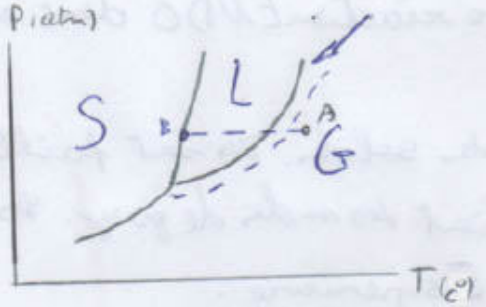
QUESTION 4 *(25 points)*

L'argent et le palladium cristallisent tous deux dans le système cubique à faces centrées. En alliage, ces deux éléments forment une solution solide idéale. Dans ces conditions, le paramètre cristallin de la maille (a) varie linéairement avec la composition. Le paramètre de maille de l'argent vaut 0,40862 nm, et celui du palladium 0,38898 nm.

Afin de déterminer la composition d'un alliage Ag_xPd_y, on analyse un échantillon par diffraction de rayons X. L'anode utilisée est du cuivre, et la longueur d'onde sélectionnée correspond à la raie K(alpha) et vaut 1,5406 ångström (1 ångström = 10^{-10} m). Dans ces conditions, l'angle de diffraction du plan (200) vaut 22,725°. Quelle est la composition de l'alliage ?

Janvier 2078 (Théorie)

Q1



éq de la courbe :

$$P^\circ_{(T)} = cst \cdot \exp\left[\frac{-\Delta H^\circ_{vap}}{RT}\right]$$

$d_S > d_L$

$$V = C - \varphi + 2$$

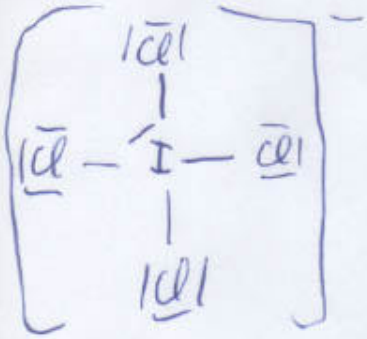
courbes : $V = 1 - 2 + 2 = 1$

pt triple : $V = 1 - 3 + 2 = 0$

Q2 Cl : $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^5$

I : $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^6\,4d^{10}\,5s^2\,5p^5$

ICl_4^-



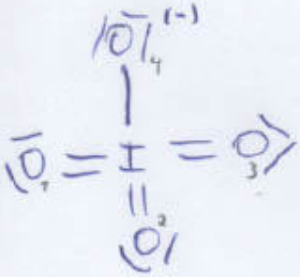
Non

CF :

Cl : $7 - 6 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 0$

I : $7 - 2 - \frac{1}{2}\cdot 8 = 1$

IO_4^-



oui

CF :

$O_{1,2,3}$: $6 - 4 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 0$

I : $7 - 0 - \frac{1}{2}\cdot 14 = 0$

O_4 : $7 - (6+1) - \frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

Q3

a) $LiBH_{4(s)} + C_{(s;g)} \xrightarrow{\text{chaleur}} 2H_{2(g)} + LiBC_{(s)}$

b) L'énoncé précise que c'est une réaction ENDO donc elle consomme de la chaleur ⇒ T° inférieure.

c) Initialement, il n'y a que des solides. Ils sont faible en énergie. En fin de réaction, on obtient des mole de gaz. Les gaz sont haut en énergie. ⇒ E supérieure.

d) Si Vest et Pest, la réaction "évitera" de former des mole de gaz. L'équilibre sera poussé vers la gauche. Si on veut que la réaction se déroule vers la droite, il faut fournir beaucoup d'énergie (sous forme de chaleur).
⇒ Chaleur en fin de réaction sera plus basse.

Janvier 2018 (Etro)

Q7

$T_1 = -63,75°C = 210K$

$P_1 = ?$

$P_2 = 1 atm$

$T_2 = -0,5°C = 272,65K$

$\Delta H°_{VAP} = 22,389 kJ/mol$

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = -\frac{\Delta H°_{VAP}}{R}\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$P_1 = 0,05 atm$

(1) $C_4H_{10(g)} + \frac{13}{2} O_{2(g)} \longrightarrow 4 CO_{2(g)} + 5 H_2O_{(l)}$

(2) $C_3H_{8(g)} + 5 O_{2(g)} \longrightarrow 3 CO_{2(g)} + 4 H_2O_{(l)}$

$m_{C_4H_{10}} + m_{C_3H_8} = 0,1737 g$

$n_{C_4H_{10}} \cdot M_{C_4H_{10}} + n_{C_3H_8} \cdot M_{C_3H_8} = 0,1737 g$

$V_{CO_2(1)} + V_{CO_2(2)} = 7,245 L$ à $21°C$ et $P = 740 mmHg$

$n_{CO_2(1)} + n_{CO_2(2)} = 7,245 L$ $= 0,9737 atm$

(1) $\frac{n_{C_4H_{10}}}{4} = n_{(O_2(1))}$

(2) $\frac{n_{C_3H_8}}{3} = n_{CO_2(2)}$

Il faut remplacer et résoudre le syst à 2 éq et 2 inc.

Q2

$t_{1/2} = 5730$ ans

$0,1255 Bq/g \longrightarrow N_0$

$0,1195 Bq/g \longrightarrow N$

$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 7,2098 \cdot 10^{-4}$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -kt$$

$t = 2277,64$ années.

(4) $n\lambda = 2d \sin\theta$

CFC

$a_{Ag} = 0{,}40862 \cdot 10^{-9}\ m$

$a_{Pd} = 0{,}38898 \cdot 10^{-9}\ m$

$\lambda = 1{,}5406 \cdot 10^{-10}\ m$

plans (200)

$\theta = 22{,}725^{\circ}$

Résolution classique. Seule difficulté à la fin, il faut ÷ par 2

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

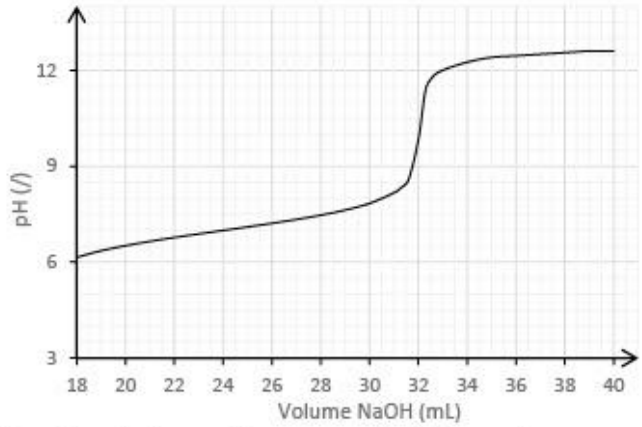
EXAMEN DE CHIMIE du 28 mai 2018

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(20 points)*

Le saut de pH représenté sur ce graphe est le second observé lors du titrage de 20,0 mL d'une solution aqueuse d'acide sulfureux par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration 0,15 mol/L.



a) Ecrivez l'équation ionique nette correspondant à ce saut.
b) La réaction est-elle complète ? Justifiez.
c) Quelle est la concentration initiale de la solution d'acide sulfureux ?
d) Quel est le pH de cette solution ?
e) Quel est le pH du mélange à la première équivalence ?
f) Schématisez sur le graphe ci-dessus la courbe de titrage si l'acide avait été moins concentré.

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 28 mai 2018

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

Une pile est construite à partir de 2 cellules électrochimiques à 25°C. L'une contient une lamelle de cuivre trempée dans une solution aqueuse de $CuCl_2$ (0,200 M), à un pH de 5, l'autre contient un fil de platine trempé dans une solution aqueuse de $NaNO_3$ (0,100 M), à un pH de 3, et du NO à la pression de 1,2 bar. Le volume de chaque solution est de 20,0 mL.

a. Ecrivez les équations ioniques nettes correspondant aux réactions à la cathode et à l'anode ainsi que la réaction globale du fonctionnement de la pile.
b. Calculez la force électromotrice de cette pile.
c. Quelle sera la différence de potentiel standard de la pile si on augmente la température à 80°C ? (Négligez la variation des grandeurs thermodynamiques pour effectuer vos calculs.)
d. Quel sera le pH dans le compartiment azoté après une électrolyse de 50 min par un courant de 100 mA à 25 °C ? Sachant que la lamelle de cuivre pesait 1,00 g avant l'électrolyse, quelle sera sa masse après ?

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

a) Quelle devrait être la concentration d'une solution aqueuse de nitrate d'argent pour que, lorsque l'on ajoute à 500 mL de cette solution 500 mL de solution aqueuse de NH_3 2.10^{-3} M, on obtienne la même concentration en cation argent et en cation complexe à l'équilibre ? (On admettra l'additivité des volumes.)

b) Quelles seront les espèces présentes en solution si on ajoute à ce mélange un large excès de cyanure de potassium solide ? Justifier sur base des constantes de complexation.

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 28 mai 2018

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

Le carbamate d'ammonium peut, dans certaines conditions, se décomposer selon la réaction suivante :

$NH_2CO_2NH_4$ (g) ↔ NH_2CO_2H (g) + NH_3 (g)

A 50°C, l'entropie standard de cette réaction vaut 225 J/mol.K, et sa constante d'équilibre vaut 1,00. On considère que les gaz se comportent comme des gaz parfaits.

a) Déterminez l'enthalpie libre standard de Gibbs et l'enthalpie standard de cette réaction
b) Dans un réacteur à 50°C, à l'équilibre, on mesure des pressions de 0,50 bar pour NH_2CO_2H et 2,00 bar pour l'ammoniac. En maintenant la température constante, on diminue ensuite le volume du réacteur de moitié par compression.
   - Que devient la constante d'équilibre ?
   - Calculez les valeurs de pressions partielles lorsque le système sera revenu à l'équilibre.

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 28 mai 2018

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

On observe que la disparition d'une substance active (médicament) dans l'organisme d'un être humain suit une loi identique à la loi de la désintégration nucléaire.
Les résultats de l'étude indiquent que le "temps de demi-vie" associé à la substance active est de 2275,8 s et que, chez l'être humain, la substance n'a plus d'effet en-dessous d'une concentration limite de 1,00 microgramme par kg de masse corporelle pour une température de 37,5°C.

1) Sachant que les doses sont fournies sous forme de pastilles contenant 750 mg de substance active, quel sera l'intervalle de temps maximum qu'un être humain de 75,0 kg devra respecter entre deux prises pour subir un effet de la substance en continu ?
2) L'effet de la température est étudié et les informations suivantes sont obtenues :

T /°C	$t_{1/2}/s^{-1}$
36,0	2332,9
37,5	2275,8
38,0	2262,8
39,0	2226,2
40,0	2192,4

Déterminez l'énergie d'activation du processus graphiquement. Détaillez vos calculs.

Mai 2018

Q7

a) $H_2SO_{3(aq)} + OH^-_{(aq)} \longrightarrow HSO_3^-{}_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}$

b) $H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(\ell)}$ $\quad \frac{1}{K_e}$

$H_2SO_{3(aq)} \rightleftharpoons HSO_3^-{}_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ $\quad K_{a1}$

$$K = \frac{1}{K_e} \cdot K_{a1} \gg 1$$

c) $1000\,ml \longrightarrow 0,15\,mol$

$18\,ml \longrightarrow 2,7 \cdot 10^{-4}\,mol$

$2,7 \cdot 10^{-4}\,mol \longrightarrow 20\,ml$

$0,0135\,mol \longrightarrow 1000\,ml$

$\Rightarrow 0,0135\,M$

d) $pH = 6,1$

e) $pH = 9,8$

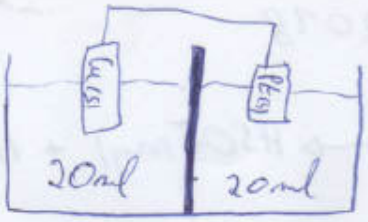
f)



initial
moins concentré

Q2

a)



$CuCl_{2(aq)}$ 0,2M $[H^+] = 10^{-5}$M

$NaNO_{3(aq)}$ 0,1M $[H^+] = 10^{-3}$M $NO_{(g)}$: 1,2 bar

Anode: $3\left(Cu_{(s)} \rightleftharpoons Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^-\right)$ $\quad \varepsilon^\circ = 0,342V$

Cathode: $2\left(NO_3^-{}_{(aq)} + 4H^+_{(aq)} + 3e^- \rightleftharpoons NO_{(g)} + 2H_2O_{(l)}\right)$ $\quad \varepsilon^\circ = 0,957V$

$$3Cu_{(s)} + 2NO_3^-{}_{(aq)} + 8H^+_{(aq)} \rightleftharpoons 3Cu^{2+}_{(aq)} + 2NO_{(g)} + 4H_2O_{(l)}$$

$2NO_3^-$: 0,1M $\quad 8H^+$: 10^{-3}M $\quad 3Cu^{2+}$: 0,2M $\quad 2NO$: 1,2 bar

b) $\Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ_{cat} - \varepsilon^\circ_{an} = 0,675V$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon^\circ - \frac{RT}{n_e F}\ln(Q)$$

$$= 0,675 - \frac{8,314 \cdot 298}{6 \cdot 96485}\ln\left(\frac{(1,2)^2 (0,2)^3}{(10^{-3})^8 (0,1)^2}\right)$$

$$= 0,378V$$

d) $Q = It = n_{e^-}F$ $\quad m_{Cu} = 1g$ $\quad m_{Cu} = 63,546\,g/mol$

$t = 50 \cdot 60 = 3000s$ $\quad n_{Cu(s)} = 0,0157\,mol$

$I = 100 \cdot 10^{-3}A$

$$n_{e^-} = \frac{I \cdot t}{F} = 3,11 \cdot 10^{-3}\,mol$$

$$2\,n_{Cu(s)} = n_{e^-}$$

$$n_{Cu(s)} = 1,555 \cdot 10^{-3}\,mol$$

$$m_{Cu(s)} = 0,09881\,g$$

$m_T = 1 - 0,09881 = 0,90119g$ restants de $Cu_{(s)}$

Mai 2018

Q4 a) $K = \exp\left[-\frac{\Delta G^\circ}{RT}\right] = \exp\left[\frac{\Delta S^\circ}{R}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\Delta H^\circ}{RT}\right]$

$\Delta S^\circ = 225$ J/mol K $T = 323$ K

$K = 1$

$R = 8,314$

$1 = \exp\left[\frac{225}{R}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\Delta H^\circ}{RT}\right]$

$1,765 \cdot 10^{-12} = \exp\left[-\frac{\Delta H^\circ}{RT}\right]$

$\Delta H^\circ = 72675$ J/mol

$\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$

$\overset{!}{=} 72675 - 323 \cdot 225$

$\overset{!}{=} 0$

b) $PV = nRT$ $P_A^\circ = \chi^A \cdot P_{Tot}$ $\chi^A = \frac{n_A}{n_T}$

$P_T = \sum_i P_i$

(Q5) $t_{1/2} = 2275{,}8$ s $750 \cdot 10^{-3}$ g pour 75 kg

$10 \cdot 10^{-3}$ g pour 1 kg

$[\,]_{lim} = 10^{-6}$ g/kg

$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -kt$ $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$

$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 3{,}0457 \cdot 10^{-4}$

$t = \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{10 \cdot 10^{-3}}\right)}{-3{,}0457 \cdot 10^{-4}} = 30\,240{,}47$ s

$\frac{1}{3}$ = 8h 24 min entre chaque prise.

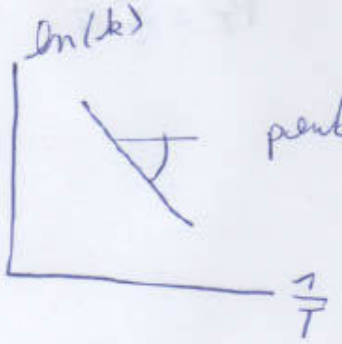
$k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$

T en Kelvin

$k = A \cdot \exp\left[-\frac{Ea}{RT}\right]$

$\ln(k) = \ln(A) \cdot \left(-\frac{Ea}{RT}\right)$

↑ ordonnée à l'origine



Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 13 août 2018

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : .....

Précision : si vous avez eu une note de janvier ou de juin <10, vous DEVEZ repasser la partie correspondante. Si vous avez obtenu une note >10 pour une partie, vous POUVEZ la repasser. Afin que ceci soit clair, tant pour vous que pour les correcteurs, vous trouverez ci-dessous les différents cas de figure possibles, et les questions associées auxquelles nous vous demandons de répondre.
Sélectionnez ci-dessous la situation qui vous correspond, entourez cette situation et signez cette page.
Ensuite, répondez aux questions.
Bon examen

A quelles questions répondre :

Situation 1. vous avez eu une note <10 à l'examen écrit de janvier ET à l'examen écrit de juin : vous répondez aux questions 1, 3, 4, 5, 6

Situation 2. vous avez eu une note <10 à l'examen écrit de juin, mais vous avez une cote d'examen de janvier supérieure ou égale à 10 (y compris le point bonus éventuel lié aux travaux personnels et la partie intégrée de l'interrogation d'octobre) : vous répondez aux questions 4, 5, 6, 7

Situation 3 : vous avez eu >10 en janvier, et une note <10 en juin, mais vous souhaitez abandonner votre note de janvier (ATTENTION, celle-ci sera effacée si vous choisissez cette option), vous répondez aux questions 1, 3, 4, 5, 6.

Situation 4 : vous avez eu une note >10 à l'examen écrit de juin, mais votre note de janvier est inférieure à 10 : vous répondez aux questions 1, 2, 3 (a) et 5 partie Q1.

Examen de chimie - août 2018

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(20 points)*

Quel volume d'éthylène glycol – $C_2H_6O_2$ - (non électrolyte) faut-il ajouter à 15 litres d'eau pour produire une solution « antigel » résistant jusqu'à – 30 °C. Quelle est la température d'ébullition de cette solution ? La masse volumique de l'éthylène glycol est égale à 1,11 g/cm^3 et celle de l'eau à 1,00 g/cm^3. La constante cryoscopique de l'eau vaut 1,86 °C kg/mol et sa constante ébullioscopique vaut 0,51 °C kg/mol.

Examen de chimie - août 2018

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

Sous une pression de 1 bar, on mélange 20,0 g de glace à – 10°C avec 100,0 g d'eau liquide à 80°C. Quelle est la température du mélange après équilibre thermique sachant que les capacités calorifiques de la glace et de l'eau liquide valent respectivement 2,08 J g^{-1} $°C^{-1}$ et 4,18 J g^{-1} $°C^{-1}$ et que l'enthalpie de fusion de la glace vaut 6,01 kJ/mol ? Vous pouvez supposer que la capacité calorifique du récipient ainsi que les pertes calorifiques sont négligeables.

Examen de chimie - août 2018

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Soit la réaction d'hydrogénation du méthanal (HCOH), sous forme gazeuse, en méthanol (CH_3OH), également sous forme gazeuse. La constante d'équilibre de cette réaction vaut 1,33 atm^{-1} à 550°C.
a) dessinez la structure de Lewis du méthanal et du méthanol. Quelle est l'hybridation des atomes de carbone et d'oxygène dans ces deux molécules ?
b) écrivez l'équation stoechiométrique de la réaction d'hydrogénation et calculez la pression partielle des différentes espèces chimiques à l'équilibre (à 550°C), sachant que la pression totale vaut 0,600 atm et que la quantité initiale de méthanol est de 1,00 mol.

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

Soit la pile
Sn | Sn^{2+} 0,050 mol/L, H^+ 1,00 mol/L, || MnO_4^- 0,020 mol/L, Mn^{2+} 0,050 mol/L, H^+ 1,00 mol/L| Pt
Les volumes aqueux initiaux dans les deux compartiments sont de 25,0 mL.
a) écrivez les équations correspondant aux réactions d'électrode et à la réaction globale.
b) quelle est la valeur de la constante d'équilibre de cette réaction ?
c) quelle est la f.e.m. de la pile décrite ci-dessus ?
d) Que vaut le potentiel de l'électrode de gauche après addition dans ce compartiment de 60,0 mL d'hydroxyde de potassium 0,500 mol/L ?

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Soient les réactions suivantes :
a) hydroxyde de cadmium (s) et acide nitreux (aq), à 25°C
b) iodate de sodium (aq) et acide nitreux (aq) à 25°C
c) réaction de formation du nitrate de sodium (solide) dans les conditions standard à 25°C

Q1 Ecrivez les équations équilibrées des réactions ci-dessus (le cas échéant les équations ioniques nettes). Indiquez de quel type de réaction il s'agit (rédox, précipitation, acide-base, ….).
Q2 Calculez les constantes d'équilibre pour ces réactions.

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 6 *(20 points)*

Soit une solution d'acide maléique 0,300 mol/L. On titre 20,0 mL de cette solution par une solution aqueuse de NaOH 0,200 mol/L.

a) écrivez les deux équations des réactions de titrage et démontrez que ces réactions sont complètes.

b) quel est le pH au second point d'équivalence ?

c) quel indicateur serait le plus approprié pour détecter ce point d'équivalence ?

Examen de chimie - août 2018

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 7

QUESTION 7 *(20 points)*

On mélange une solution aqueuse de nitrate d'argent (solution 1) avec une solution aqueuse de carbonate de sodium (solution 2).

1) Quelle réaction pourrait se produire ?

2) Quelle est la valeur de la constante d'équilibre de cette réaction à 298 K ?

3) Cette réaction se produira-t-elle si on mélange :

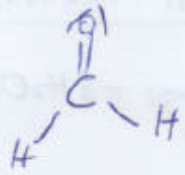
a) 10,0 mL de solution 1 (10^{-3} mol/L) et 20,0 mL de solution 2 (10^{-4} mol/L)

b) 20,0 mL de solution 1 (10^{-3} mol/L) et 10,0 mL de solution 2 (10^{-4} mol/L)

Calculer les concentrations à l'équilibre de tous les ions présents après mélange.

Août 2018

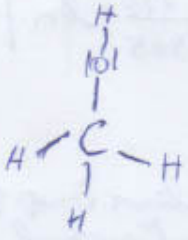
Q3 méthanal : $6 + 2 \cdot 1 + 8 = 16\ \bar{e}$



C : sp^2
O : sp^2

CF
C : $4 - 8 \cdot \frac{1}{2} = 0$
O : $6 - 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$

méthanol



C : sp^3
O : sp^3

$$HCOH_{(g)} + H_{2(g)} \rightleftharpoons CH_3OH_{(g)}$$

n_0	0	0	1
n_f	x	x	$1-x$

$P_T = 0,6 = 1 - x + x + x$

$|x| = 0,4$

$K_p = 1,33 = \dfrac{P^\circ_{CH_3OH}}{P^\circ_{H_2} \cdot P^\circ_{HCOH}}$ ← on remplace $P^\circ_A = P_T \cdot \chi_A$

P_T → $0,6$; χ_A → $\frac{n_A}{n_T}$

$n_T = 0,6 + 0,4 + 0,4$

Q7 $\Delta T = \bar{m} \cdot K_{éb} \cdot \nu$

$\Delta T = \bar{m} \cdot K_{cryo} \cdot \nu$

$\Pi = CRT\nu$

Q4

Anode : $5\left(Sn^{2+}_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons Sn_{(s)}\right)$ $\quad \varepsilon^\circ = -0{,}138\,V$

Cathode : $2\left(MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+_{(aq)} + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O_{(l)}\right)$ $\quad \varepsilon^\circ = 1{,}507\,V$

$$2MnO_4^-{}_{(aq)} + 16H^+_{(aq)} + 5Sn_{(s)} \rightleftharpoons 2Mn^{2+}_{(aq)} + 8H_2O_{(l)} + 5Sn^{2+}_{(aq)}$$

$0{,}02\,M$ $\quad 1\,M$ $\quad 0{,}05\,M$ $\quad 0{,}05\,M$

$$\Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ_c - \varepsilon^\circ_a = 1{,}645\,V$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^\circ - \frac{RT}{nF}\cdot \ln(Q) = 1{,}645 - \frac{8{,}314 \cdot 298}{10 \cdot 96485}\cdot \ln\left(\frac{0{,}05^2 \cdot 0{,}05^5}{0{,}02^2 \cdot 1^{16}}\right)$$

$$= 1{,}678\,V$$

$K = \exp\left[\frac{nF\Delta\varepsilon}{RT}\right\}$ = math error. Valeur trop grande mais c'est normal.

$$Sn^{2+}_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons Sn(OH)_{2(s)} \quad K_s$$

$$2\left(H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}\right) \quad \frac{1}{K_e}$$

$$Sn^{2+}_{(aq)} + 2H_2O_{(l)} \rightleftharpoons Sn(OH)_{2(s)} + 2H^+_{(aq)}$$

$$K = K_s \cdot K_e^{-2}$$

Il faut trouver $[Sn^{2+}]$ et calculer Nernst

Août 2018

Q6

1) $H_2X_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \longrightarrow HX^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

2) $HX^-_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \longrightarrow X^{=}_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

$20ml = 6\cdot10^{-3}$ mol : il faut 2 fois plus de $6\cdot10^{-3}$ mol d'acide fort car $0,03l \cdot 2 = 0,06l$

$V_T = 20ml + 2\cdot30ml = 80ml$

$[OH^-] = \sqrt{Kb_2 \cdot C_b} = \sqrt{\frac{10^{-14}}{ka_2} \cdot \frac{6\cdot10^{-3}}{0,08}} = 3,1\cdot10^{-5}M$

$pOH = 4,5 \rightarrow pH = 9,5$

Indicateur coloré : Phénolphtaléine 8,3 → 10,5

Décima

1) $H_2X_{(aq)} \rightleftharpoons HX^-_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ ka_1

$H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$ $\frac{1}{Ke}$

$K_1 = ka_1 \cdot \frac{1}{Ke} \gg 1$

2) $HX^-_{(aq)} \rightleftharpoons X^{=}_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ ka_2

$H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$ $\frac{1}{Ke}$

$K_2 = ka_2 \cdot \frac{1}{Ke} \gg 1$

Les 2 réactions sont complètes.

47

1) $2AgNO_{3(aq)} + Na_2CO_{3(aq)} \rightleftharpoons Ag_2CO_3 + 2NaNO_3$

2) $2Ag^+_{(aq)} + CO_3^{2-}{}_{(aq)} \rightleftharpoons Ag_2CO_{3(s)}$ $\frac{1}{K_s} = 1,1834 \cdot 10^{11}$

$2(Na^+_{(aq)} + NO_3^-{}_{(aq)} \rightleftharpoons NaNO_3)$ K_i^2

$\Delta H_i^\circ = -20,37 \text{ kJ/mol}$

$\Delta S_i^\circ = -88,88 \text{ J/mol K}$

$K_i = \exp\left[\frac{\Delta S_i^\circ}{R}\right] \cdot \exp\left[\frac{-\Delta H_i^\circ}{RT}\right] = 0,0847$

3) Il faut calculer la cst d'équilibre des réactions.

Si $K > K_s$ alors précipitation.

N° corr

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 7 janvier 2019

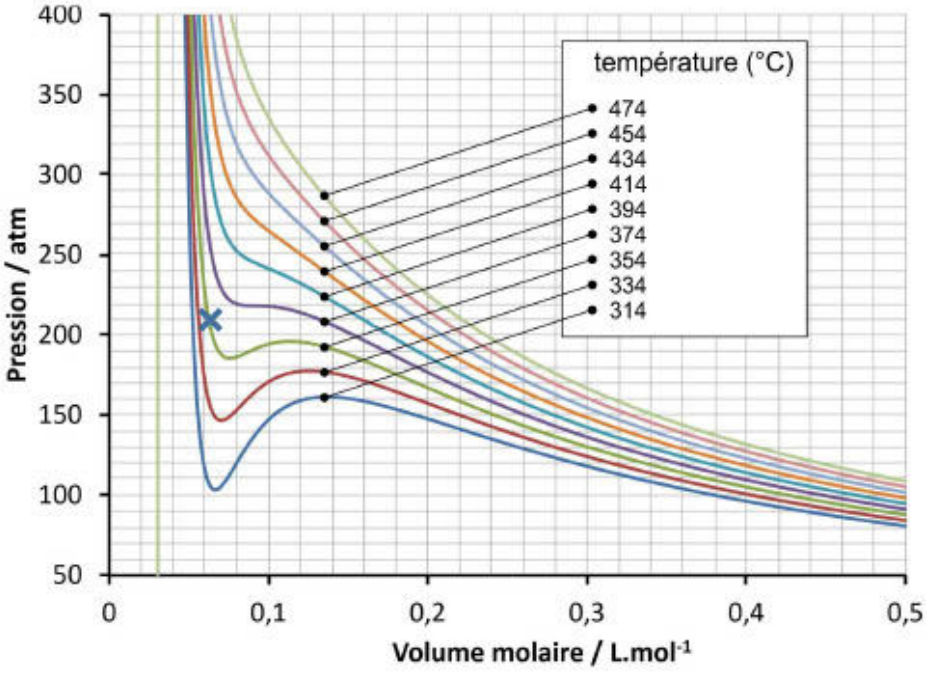
Première partie – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(15 points) (Veuillez répondre au verso de cette page-ci)*

Par application de la formule des gaz réels de van der Waals, le graphique ci-dessous porte la pression en fonction du volume molaire d'une substance, à différentes températures.



a) Donnez les coordonnées du point critique ($V_{mol,crit}$, P_{crit}, T_{crit}) de cette substance.

b) Cette substance est-elle liquéfiable par compression à 340°C ? Justifiez votre réponse en 1 ligne

c) Sous quel état physique se trouve la substance à 210 atm à 354°C. Justifiez votre réponse et indiquez sur le graphique le point qui vous mène à votre conclusion.

a) $V_{mol,crit} = 0{,}090\ L.mol^{-1}$; $P_{crit} = 220$ atm ; $T_{crit} = 374°C$
b) oui, car $T < T_{crit}$
c) liquide

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

a) Compétez le tableau ci-dessous

	N_2H_4	H_2	N_2O
Représentez **une** structure de Lewis possible		H-H	
Types d'interaction entre molécules	D-D D-DI DI-DI Liaison H	DI-DI	D-D D-DI DI-DI
Hybridation des deux atomes de N (à identifier par un n° sur la structure de Lewis représentée)	N(1) : sp^3 N(2) : sp^3	Ne rien indiquer ici	N(1) : sp N(2) : sp
Charges formelles des deux atomes	N(1) : 0 N(2) : 0	H(1) : 0 H(2) : 0	N(1) : 0 N(2) : +1
Types de liaisons sur la structure de Lewis représentée (σ et/ou π)	Entre N et N : σ	Entre H et H : σ	Entre N et O : σ

b) Laquelle des trois espèces a un comportement qui s'éloigne le plus de celui d'un gaz parfait ? Justifiez votre réponse.

N_2H_4, en raison des liaisons hydrogènes. Ces interactions sont plus importantes que celles liées au moment dipolaire de N_2O.

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(15 points)*

La configuration électronique $\sigma_{1s}^2\ \sigma_{1s}^{*2}\ \sigma_{2s}^2\ \sigma_{2s}^{*2}\ \pi_{2px}^2\ \pi_{2py}^2\ \sigma_{2p}^1\ \sigma_{3s}^1$ correspond à un des états excités de la molécule de CO.

a) Écrivez la configuration électronique de CO dans son état fondamental.
b) L'énergie de la liaison dans l'état excité mentionné varie-t-elle significativement par rapport à celle de l'état fondamental ? Justifiez à l'aide des ordres de liaison.
c) Cette molécule est-elle paramagnétique ou diamagnétique dans l'état excité ? Justifiez.

a) $\sigma_{1s}^2\ \sigma_{1s}^{*2}\ \sigma_{2s}^2\ \sigma_{2s}^{*2}\ \pi_{2px}^2\ \pi_{2py}^2\ \sigma_{2p}^2$
b) Non, car dans les 2 cas, l'ordre de liaison est égal à 3 (OL = $\frac{10-4}{2} = 3$)
c) Paramagnétique, car elle présente des électrons non appariés

QUESTION 4 *(10 points)*

Deux sources laser sont dirigées vers une surface métallique.
La première source émet des photons à une longueur d'onde de 200 nm avec une puissance de 1 W.
La seconde source émet des photons à une longueur d'onde de 500 nm avec une puissance de 10W.
Déterminez quelle source est la plus susceptible de déclencher l'effet photoélectrique.
Justifiez en 4 lignes maximum.

La première : E = hυ : $\frac{hc}{\lambda}$ Si λ est inférieure, l'énergie des photons est plus élevée et davantage susceptible de déclencher une photoémission.

La puissance du faisceau n'intervient pas.

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 5 *(20 points)*

Cochez la case à côté de la réponse correcte. Il n'y a qu'une réponse correcte par énoncé.
Attention : Réponse au stylo à bille uniquement. Une rature ou une correction entraine l'annulation de la sous-question.

a. La définition de l'électronégativité selon Pauling dépend :
- □ du rayon covalent des atomes impliqués dans la liaison chimique.
- ☒ de l'énergie des liens entre les atomes impliqués dans la liaison.
- □ de l'affinité électronique des espèces.
- □ de la température.
- □ Aucune des réponses précédentes.

b. Soit le xénon, gaz noble de la 5ème période du tableau périodique et le krypton le gaz rare de la 4ème période. Quelle est la structure électronique fondamentale du xénon :
- □ [Kr] $5s^2$
- □ [Kr] $5s^2 4d^{10}$
- ☒ [Kr] $5s^2 4d^{10} 5p^6$
- □ [Kr] $5s^2 5d^{10} 5p^6$
- □ [Kr] $4s^2 5d^{10} 6p^6$
- □ [Kr] $5s^2 5p^6$

c. L'énergie d'un photon est :
- ☒ proportionnelle à sa fréquence
- □ inversement proportionnelle à sa fréquence
- □ proportionnelle à sa masse au repos
- □ proportionnelle au flux de photons d'une source lumineuse
- □ Aucune des propositions précédentes

d. La fonction de distribution radiale de l'orbitale 1s de l'ion $_{92}U^{91+}$ présente un maximum :
- □ plus éloigné du noyau par rapport à celui de l'orbitale 1s de l'H
- ☒ plus proche du noyau par rapport à celui de l'orbitale 1s de l'H
- □ de position inchangée par rapport à celui de l'orbitale 1s de l'H
- □ qui confère à l'ion U^{91+} une énergie d'ionisation plus faible que celle de l'atome d'hydrogène.

e. En supposant que la température de la surface du soleil soit plus élevée que sa température actuelle :
- ☒ son maximum d'émission se rapprocherait du violet
- □ son maximum d'émission se rapprocherait du rouge
- □ son maximum d'émission resterait inchangé car la longueur d'onde des photons émis par le soleil ne dépend pas de la température

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 6 *(20 points)*

La formation de l'espèce $Ni(CO)_4(g)$ à température ambiante à partir de nickel solide et de monoxyde de carbone est un processus chimique spontané dans les conditions standard.

a) Ecrivez la réaction chimique de cette transformation.
b) Ecrivez l'expression de la constante d'équilibre de cette réaction chimique.
c) Quel serait l'effet d'une augmentation de la pression du CO(g) sur la valeur de la constante d'équilibre ?
d) Quel est le signe de la variation de l'enthalpie de cette transformation. Justifier votre raisonnement en 5 lignes maximum

a) $Ni\ (s) + 4\ CO\ (g) \rightleftharpoons Ni\ (CO)_4\ (g)$

b) $Kp = \frac{P_{Ni\ (CO)4}}{P_{CO}^4}$

c) Aucun effet

d) $\Delta_r G° < 0$ or $\Delta_r G° = \Delta_r H° - T\Delta_r S°$, à T ambiante la réaction consomme des moles de gaz : $\Delta ng = 1 - 4 = -3 \rightarrow \Delta S$, la variation de l'entropie du système, est négative.

$\rightarrow -T\ \Delta_r S° > 0$. Pour que $\Delta_r G°$ soit < 0, il faut obligatoirement que $\Delta_r H°$ le soit aussi.

$\rightarrow \boxed{\Delta_r H° < 0}$

N° corr

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 7 janvier 2019

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(20 points). La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

Lors de la combustion complète d'un hydrocarbure gazeux C_xH_y, on récupère 165,74 g d'eau et 404,89 g de dioxyde de carbone.

1) Déterminez la masse d'hydrocarbure brûlée lors de cette combustion.
2) Dans les conditions normales de température et de pression, l'hydrocarbure de départ occupe un volume de 51,55 L. Déterminez sa formule moléculaire.
3) Écrivez la réaction de la combustion complète de l'hydrocarbure.
4) Calculez le volume d'air utilisé à 25°C et à 1,00 atm lors de la combustion sachant que l'air est un mélange constitué de 21% en volume de dioxygène et de 79 % de diazote.

1) $m_{(CH2)n}$ = 9,2 mol. 12,011 g mol^{-1} + 18,4 mol. 1,0079 g mol^{-1} = 129,05 g

2) C_4H_8

3) C_4H_8 (g) + 6 O_2 (g) → 4 CO_2 (g) + 4 H_2O (l)

4) $V = \frac{n\,R\,T}{p} = \frac{52{,}57\ \text{mol} \cdot 0{,}08206\ \text{L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 298{,}15\ \text{K}}{1\ \text{atm}} = 1286\ \text{L}$

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

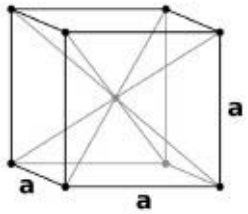
Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

La maille élémentaire d'un cristal métallique de molybdène est un cube centré dont l'arête mesure 0,31474 nm.
D'après ces données :

1) Calculez le volume molaire (en $cm^3.mol^{-1}$) de ce métal.
2) A quel angle doit-on s'attendre à un pic de diffraction du premier ordre sur la face (002) de ce métal si une source de rayons X de 0,1541 nm de longueur d'onde est utilisée ?
3) Que vaut le rayon métallique d'un atome de molybdène ?

1)



→ V_m = 9,385 $cm^3\ mol^{-1}$.

2) Selon le schéma, il apparaît que $d_{(002)} = \frac{a}{2}$ = 0,15737 nm

→ θ = 0,5116 rad

3) → $r_{mét} = \frac{\sqrt{3}.a}{4}$ = 0,13629 nm

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Pour l'ammoniac, les équations des courbes de sublimation et de vaporisation vérifient les relations suivantes :

$$\text{Sublimation} : ln\left(\frac{P_S}{P^0}\right) = 16{,}4018 - \frac{3752{,}706\ K}{T}$$

$$\text{Vaporisation} : ln\left(\frac{P_V}{P^0}\right) = 11{,}1696 - \frac{2730{,}033\ K}{T}$$

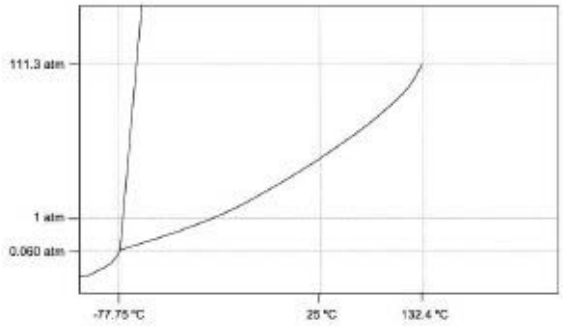
où P_S est la pression d'équilibre solide-gaz, P_V est la pression de vapeur saturante, $P^0 = 1\ bar$ et T est la température (en K).

a. Déterminez les coordonnées du point triple.
b. Schématisez le diagramme de phases de l'ammoniac sachant que les coordonnées du point critique de NH_3 sont (132,25°C ; 113,33 bar) et que la densité de l'ammoniac liquide est plus faible que celle de l'ammoniac solide. Faites apparaître sur votre schéma les coordonnées des points essentiels. Le schéma ne doit pas respecter les échelles.
c. Déterminez l'enthalpie de fusion de l'ammoniac et l'enthalpie de formation du $NH_3(s)$ dans les conditions définies par le point triple sachant que l'enthalpie de formation du $NH_3(g)$ dans ces conditions est égale à -46,11 kJ.mol^{-1}.

a) Les deux courbes se rencontrent au point triple :

$$16{,}4018 - \frac{3752{,}706}{T} = 11{,}1696 - \frac{2730{,}033}{T}$$

→ T = 195,458 K et P = 0,0609442 bar



b) (Rem. les unités de la pression sont des atm et non des bars mais le schéma reste évidemment valable)

c) Au point triple, $\Delta H_{fus} + \Delta H_{vap} = \Delta H_{subl}$

→ $\Delta_f H°_{NH3(s)} = \Delta_f H°_{NH3(g)} - \Delta_f H°_{subl\ NH3}$ → $\Delta_f H°_{NH3(s)} = -77310$ J mol^{-1}

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

La molécule responsable de l'arôme d'orange, de citron et d'autres agrumes est un hydrocarbure : le limonène ($C_{10}H_{16}$). En étudiant l'absorption du limonène, on trouve un maximum d'absorption à une longueur d'onde de 358 nm dans une cellule 40 cm. A cette longueur d'onde, on mesure ensuite l'absorbance de plusieurs solutions de limonène aux concentrations connues pour construire une droite d'étalonnage (absorbance en fonction de la concentration). Cette droite passe par le point suivant :

$$C = 1{,}50.10^{-2}\,\text{mol.L}^{-1};\ A = 0{,}178$$

a) Dans quelle région du spectre absorbe le limonène ?
b) À la même longueur d'onde, une solution inconnue de limonène a une absorbance de 0,230. Déterminez la concentration de cette solution.
c) Quelle énergie faudrait-il fournir pour exciter une mole de limonène par un rayonnement absorbé à 555 cm^{-1} ? Dans quel domaine du spectre électromagnétique ce rayonnement se trouve-t-il ?

a) UV (proche)
b) Si A = 0,230, alors $C = \frac{0{,}230}{11{,}867} = 1{,}94.10^{-2}$ mol L^{-1}

c) $\frac{1}{555\ cm^{-1}} = \lambda = 1{,}802.10^{-3}$ cm, ou $1{,}802.10^{-5}$ m, ou 18,02 nm → IR

E = 6645 $J.mol^{-1}$

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Les chaufferettes portables utilisées pour réchauffer des gants ou des vestes sont remplies d'une solution saturée en acétate de sodium et d'une petite pièce métallique que l'on manipule afin d'initier la réaction de solidification de l'acétate de sodium. La réaction impliquée est la suivante :

$$CH_3COO^-(aq) + Na^+(aq) + 3H_2O(l) \rightarrow CH_3COONa.3H_2O\ (s)$$

1) A l'aide de vos tables thermodynamiques, déterminez l'enthalpie de la réaction de solidification de l'acétate de sodium ($\Delta_f H°(CH_3COONa.3H_2O\ (s))$ = -1603.18 kJ/mol) à 298 K dans les conditions standard.

2) En considérant qu'une chaufferette de 20,0 g ne contient plus que du solide, déterminez l'énergie dégagée par une chaufferette.

3) Calculez l'élévation de température que subirait une masse de 10 g d'hélium (considéré comme gaz parfait) dans un volume maintenu constant et sans perte de chaleur s'il était chauffé par une chaufferette. Négligez l'énergie perdue à chauffer l'enveloppe de l'objet et la petite pièce métallique.

1) $\Delta_r H^0_{298\,K}$ = -19,56 K J mol^{-1}

2) Q = n. $\Delta_r H^0_{298\,K}$ = 2875 Joules

3) $\Delta T = \frac{2875\ J}{2{,}5\ mol \cdot 12{,}47\ J.mol^{-1}\ K^{-1}} = 92\ K$

N° corr

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 27 mai 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : ..... 1 /20

QUESTION 1 *(20 points)*

On effectue l'électrolyse de l'eau à 298 K avec un courant de 25,0 A pendant 30,0 minutes, dans les conditions standard en milieu basique.

a) Écrivez les deux demi-équations et l'équation globale de cette électrolyse.

b) Quelle est le volume maximal de dihydrogène susceptible d'être récupéré lors de cette opération ?

c) À l'aide des tables, calculez l'énergie minimale requise pour réaliser cette opération.

d) Une batterie de téléphone portable de 4000 mAh (milliampère.heure) suffirait-elle pour produire un tel volume de dihydrogène par électrolyse ? Justifiez

a)

$2x\ [2H_2O(l) + 2e^- \rightleftharpoons H_2(g) + 2OH^-(aq)]$

$4OH^-(aq) \rightleftharpoons O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^-$

$2H_2O(l) \rightleftharpoons O_2(g) + 2H_2(g)$

b)

$V = \frac{nRT}{P} = \frac{0{,}4664\ \text{mol} \cdot 0{,}08206\ \text{L atm}\ mol^{-1}K^{-1} \cdot 298K}{0{,}9869\ \text{atm}}$

= 5,778 Litres → arrondi à 5,78 L

c)

Pour la réaction :

$H_2(g) + ½\ O_2(g) \rightarrow H_2O\ (l)$

$\rightarrow \Delta_r G^0_{298K}$ = +237,18kJ.mol^{-1}.0,2332 mol

= 55,31 kJ, arrondi à 55,3 kJ

Autre approche possible :

$\Delta E°$ = -1,229V (une valeur négative est effectivement attendue pour un processus non spontané)

$\Delta G°$ = -45000C.(-1,229V) = 55305J, arrondi à 55,3KJ

d)

4Ah = 4C.s^{-1}.3600s =14400C

La charge de cette batterie est donc insuffisante car il faudrait 45000C.

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : ..... **2** **/20**

QUESTION 2 *(20 points)*

Une pile est construite à partir de deux cellules électrochimiques à 25°C en milieu acide :

Cu (s)	Cu^{2+} (aq) $[Cu^{2+}] = 0{,}0150$ mol.L^{-1} V = 100 mL		X^{+} (aq) $[X^{+}] = 0{,}0200$ mol.L^{-1} V=100 mL	X(s)

a) Si la force électromotrice de cette pile vaut 0,412 V, quel est l'élément X ?

b) La masse volumique de la solution du compartiment anodique augmentera-t-elle ou diminuera-t-elle au cours de la décharge de la pile ? Justifiez en trois lignes maximum.

c) Quelle serait la force électromotrice de cette pile suite à l'ajout de 5,00 grammes de chlorure de sodium dans le compartiment de droite ? On suppose que la dissolution du sel n'entraine pas de variation significative du volume de la solution.

a)

E° = 0,700V + 0,100V = 0,800V → tables → X = Ag

b)

La masse volumique du compartiment anodique augmentera sans doute du fait de l'élévation de la concentration en ions Cu(II) en solution, p. ex sous forme de $Cu(NO_3)_2$ si le pont salin est fait de KNO_3.

c)

Ajout de 5,00g de NaCl :
- provoque une précipitation dans le compartiment contenant des ions Ag^+ sans forme d'AgCl (s)

$E_{Ag^+/Ag} = 0{,}800 - \frac{8{,}314.298}{1.96485}\, ln\, \frac{1}{2{,}11.10^{-10}}$
$= 0{,}228$V
$E_{Cu^{2+}/Cu} = 0{,}288$ V
Il y a inversion de polarité : fem = 0,288 V - 0,228 V = 0,060V (la valeur négative est acceptée aussi car on ne demande pas de notifier cette inversion de polarité)

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : ..... **3** **/20**

QUESTION 3 *(20 points)*

Lors d'une préparation réalisée à 25°C, on dissout 4,65 g de butylamine-1 ($CH_3(CH_2)_2CH_2NH_2$) et 10,12 g de chlorure de butyl-1-ammonium ($CH_3(CH_2)_2CH_2NH_3Cl$) dans de l'eau. Le volume est amené à 500,0 mL avec de l'eau distillée.

a) Quel est le pH de cette solution de départ ?

Quel est le pH de la solution si on ajoute à la solution de départ :

b) 5,0 mL d'une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène 6,0 mol/L.

c) 8,42 g d'hydroxyde de potassium solide. On négligera l'effet de cet ajout sur la variation du volume final.

d) 300 mL d'eau distillée.

a)

$C_4H_{11}N$: 4,65g (base) et $C_4H_{12}NCl$: 10,12g (acide conjugué)

Af et Bf conjugués → mélange tampon

pH = 10,61

b) $pH = 10,772 + \log \frac{\frac{3,358.10^{-2}}{V}}{\frac{12,234.10^{-2}}{V}} = 10,21$

c) pH = 13,06

d) Dilution simple, sans effet sur le pH du mélange tampon → pH = 10,61

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : ..... **4** **/20**

QUESTION 4 *(20 points)*

L'eau de Javel doit ses propriétés décolorantes et désinfectantes à l'ion hypochlorite qu'elle contient. En milieu basique et à température suffisante, on observe la dismutation de cet ion selon la réaction :

$$3ClO^-(aq) \rightarrow ClO_3^-(aq) + 2Cl^-(aq)$$

Lors de l'étude cinétique de cette réaction à 25 °C, il a été possible d'obtenir les données suivantes :

Temps (s)	0	1000	3000	10 000	20 000	40 000	100 000
$[ClO^-]$ (10^{-3} mol/L)	12,7	12,2	11,3	8,9	6,9	4,7	2,4

Une analyse rapide de ces données montre que la vitesse de la réaction varie en fonction du temps et que le temps de demi-réaction dépend de la concentration du réactif.

a) Quel est l'ordre cette réaction (0, 1 ou 2) par rapport aux ions hypochlorite ? Justifiez en trois lignes maximum.

b) Confirmez cet ordre réactionnel par un graphique et déduisez-en la constante cinétique de la réaction.

c) Après combien de temps 70% des ions hypochlorite auront-ils réagi ?

a)

C'est un ordre 2

b)

voir graphique qui confirme l'ordre 2 le coefficient angulaire vaut 3k
Dans le graphique : $3k = \frac{400-125}{96000-1400} = 3{,}36.10^{-3}$
→ $k = 1{,}12.10^{-3} L.mol^{-1}s^{-1}$

c)
Il reste $3{,}81.10^{-3}$ $mol^{-1}.L^{-1}$ d'ions ClO^-
→ Le graphique $\frac{1}{[clo^-]} = \frac{1}{[clo^-]i} + akt$ montre que pour $\frac{1}{[clo^-]} = 262$ L mol^{-1}, **t ≈ 55000s**

N° corr

Détermination des paramètres cinétiques de la réaction de dismutation de l'ion hypochlorite à 298 K

temps / s

/

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: ..... _____

Section et numéro de matricule : ..... **5** **/20**

QUESTION 5 *(20 points)*

Le problème de la pollution atmosphérique par les oxydes d'azote (les NO_x) résulte de la réaction entre le diazote et le dioxygène de l'air à haute température. Ces conditions se rencontrent à l'intérieur des moteurs à essence ou Diesel, ainsi que dans des chaudières au gaz ou au mazout.
Le monoxyde d'azote étant nocif pour la santé, une étude de sa formation est entamée. La constante d'équilibre K_c de la réaction $N_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2\ NO(g)$ à 1200 °C vaut $1{,}00.10^{-5}$.

a) Calculez les concentrations molaires à l'équilibre de NO, O_2 et N_2 dans un réacteur de 10,0 L contenant initialement 0,312 mol de N_2 et 0,407 mol de O_2.
b) La valeur numérique de la constante K_c est-elle plus élevée, plus basse ou égale à $1{,}00.10^{-5}$ à la température de 1000 °C ? Justifiez.

a)

Solution « approximative » (on néglige le terme en x et $10^{-5}\ x^2$)
$\rightarrow 4x^2 = 1{,}26984.10^{-8} \rightarrow x = +/- 5{,}634.10^{-5}$ mol.L^{-1}

Solution exacte :
$x_1 = 5{,}6254.10^{-5} \rightarrow$ $[N_2] \approx 0{,}0311$ mol.L^{-1}
$[O_2] \approx 0{,}0406$ mol.L^{-1}
$[NO] \approx 1{,}125.10^{-4}$ mol.L^{-1}

b)

Plus basse.
L'énoncé suggère fortement que la réaction est endothermique, mais la formation de NO à haute température dans un moteur thermique pourrait résulter d'un effet cinétique.
Pour répondre exactement à cette question, il suffit d'aller voir dans les tables le signe de $\Delta_f H_{298K}$ pour NO(g), qui est bien positif.
Le principe de Le Chatelier indique que K ↘ si T ↘ pour une réaction endothermique.

N° 190

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 12 août 2019

NOM, PRÉNOM (en majuscules) :..... _____

Section et numéro de matricule : .....

N'ouvrez ce fascicule qu'au signal de votre assistant

Précision :
Si vous avez eu une note à l'examen de janvier inférieure à 10/20, vous DEVEZ le repasser.
Si vous avez obtenu une note supérieure ou égale à 10/20 pour une partie, vous POUVEZ le repasser.

Afin que ceci soit clair, tant pour vous que pour les correcteurs, vous trouverez ci-dessous les deux cas de figure possibles.
Sélectionnez ci-dessous la situation qui vous correspond, entourez cette situation et signez cette page.
Ensuite, répondez aux questions.
Bon examen

A quelles questions répondre :

Situation 1. Vous avez eu une note inférieure à 10/20 à l'examen écrit de janvier 2019 OU vous avez une note supérieure à 10 mais vous souhaitez améliorer votre résultat de janvier (ATTENTION, votre note de janvier sera effacée si vous choisissez cette option).

- Vous répondez aux questions 1,2,3,4 (situation 1) et 5

Situation 2. Vous avez une note supérieure ou égale à 10/20 à l'examen écrit de janvier 2019 et vous souhaitez conserver cette note.

- Vous répondez aux questions 4 (situation 2), 5, 6, 7, 8

Entourez votre choix ci-dessous :

Situation 1 / Situation 2

Signature

N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : ..... **1** /20

QUESTION 1 *(20 points)* (Q1)

La distribution de Maxwell-Boltzmann d'un gaz monoatomique donné indique que la vitesse la plus probable des atomes de ce gaz est de 759,5 $m.s^{-1}$ à 700 K.

a) Calculez la valeur de la vitesse quadratique moyenne.
b) Donnez la valeur et les unités de la capacité calorifique de ce gaz à pression constante.
c) Une compression isotherme de ce gaz entrainera-t-elle une modification de la distribution de vitesses de Maxwell-Boltzmann ? Justifiez votre réponse.
d) A pression constante, la moitié de l'énergie d'une mole de ce gaz est transférée pour chauffer 100 grammes d'eau initialement à 20°C. Quelle sera la température de l'eau après ce transfert de chaleur *(Vous pouvez supposer que la capacité calorifique du récipient ainsi que les pertes calorifiques sont négligeables)*.
e) Donnez la nature de ce gaz.

Examen de chimie - août 2019

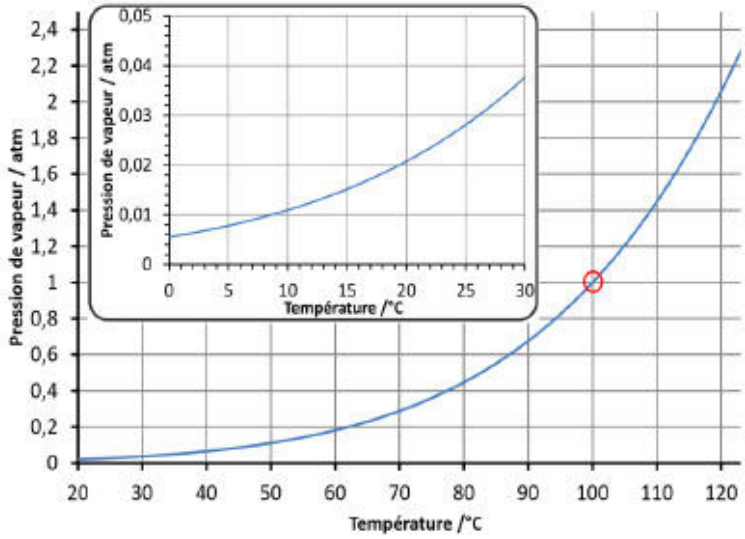
NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : .....

2 /20

QUESTION 2 *(20 points)* (Q1)

La courbe de la tension de vapeur de l'eau entre 0 et 120 °C est présentée ci-dessous. Un volume fermé indéformable de 1,00 litre contient 1,00 gramme d'eau à 20°C. On considère que les équilibres liquide-gaz sont atteints et qu'il n'y a pas d'autres espèces chimiques dans le volume.



a) Quel est le pourcentage de l'eau à l'état liquide à 20°C dans le volume ?

b) Quelle est la pression exercée par les molécules de gaz à 60 °C ?

c) Quelle est la pression exercée par les molécules de gaz à 120 °C ?

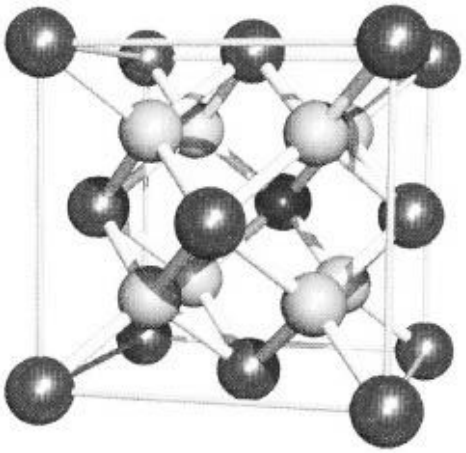
d) A 120°C, quelle serait la pression exercée par les molécules d'eau sur la paroi s'il y avait 5,00 grammes d'eau dans l'enceinte ?

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : ..... 3 /20

QUESTION 3 *(20 points)* (Q1)



La fluorine est un solide ionique dont la formule est CaF_2. La structure cristalline de la fluorine est une maille cubique dont une représentation est reproduite ci-contre.

a) Donnez la nature des ions représentés en gris clair sur la figure. Justifiez votre réponse.

b) Sachant que la masse volumique de la fluorine est de 3,18 $g.cm^{-3}$, calculez la longueur de l'arête de la maille.

c) Déduisez-en la distance la plus courte entre les ions Ca^{2+} et F^- (en d'autres termes, la distance représentée par les bâtonnets courts sur la figure).

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : ..... 4 /20

QUESTION 4 *(20 points)*

Veillez à ne répondre qu'à la question qui correspond à votre situation :

Situation 1 (Q1 + Q2)

Si on dissout 5,10 grammes d'un acide faible inconnu (HA) dont la masse molaire est de 85,0 g/mol dans 500 g d'eau, on obtient une solution dont le point de congélation est de -0,257 °C et dont la masse volumique est assimilable à celle du solvant pur.
La constante cryoscopique de l'eau est de 1,86 $K.kg.mol^{-1}$

a) Calculez la constante d'acidité K_a de cet acide faible.

Situation 2 (Q2)

On utilise de l'hydroxyde de potassium pour faire précipiter chaque cation des solutions suivantes. Déterminez la concentration minimale de KOH requise pour amorcer la précipitation dans les deux cas suivants et calculez les pH correspondants :

a) $CaCl_2$ 0,015 $mol.L^{-1}$
b) $Fe(NO_3)_2$ 0,0025 $mol.L^{-1}$
c) En supposant une solution suffisamment acide pour maintenir en solution les deux solutés « a » et « b » ci-dessus, quel précipité sera formé en premier lieu lors de l'ajout progressif d'hydroxyde de potassium ? Justifiez brièvement.

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : ..... 5 /20

QUESTION 5 *(20 points)* (Q1 et Q2)

Les biphényles polychlorés (PCB) sont une classe de produits chimiques industriels qui ont été très utilisés mais on a constaté qu'ils constituaient un risque pour la santé et l'environnement. Les PCB ne contiennent que du carbone, de l'hydrogène et du chlore. Un PCB donné a une masse molaire de 360,88 $g.mol^{-1}$. La combustion de 1,52 g de ce composé donne 2,224 g de CO_2 et la combustion de 2,53 g donne 0,2530 g de H_2O. Combien y a-t-il d'atomes de carbone, d'hydrogène et de chlore dans une molécule de ce PCB-ci ?
Détaillez vos calculs.

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : ..... **6** /20

QUESTION 6 *(20 points)* (Q2)

On considère la pile suivante à 25°C :

Pt (s)	MnO_4^- (aq) 0,5 mol/l MnO_4^{2-} (aq) 0,8 mol/l V = 20,00 mL	$AuCl_4^-$ (aq) 0,5 mol/l Cl^- (aq) 0,1 mol/L V = 20,00 mL	Au (s)

a) Écrivez les équations chimiques à l'anode et à la cathode ainsi que l'équation de la réaction spontanée dans les conditions standard.
b) Calculez la f.é.m. de la pile dans les conditions standard et dans les conditions décrites ci-dessus.
c) Quelle sera la f.é.m. de la pile si l'on ajoute 20,00 mL d'eau pure dans le compartiment anodique ?
d) Calculez la constante d'équilibre de cette réaction ? S'agit-il d'une réaction complète ou incomplète ?
e) Calculez la concentration du réactif en excès lorsque la pile sera déchargée ?
f) La masse de l'électrode de platine sera-t-elle supérieure, inférieure ou inchangée quand la pile sera déchargée ? Justifiez votre réponse.

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : .....

7 /20

QUESTION 7 *(20 points)* (Q2)

Soit la réaction de décomposition du carbonate de magnésium :

$$MgCO_3(s) \rightleftharpoons MgO(s) + CO_2(g)$$

a) Déterminez la constante d'équilibre de cette réaction à 490 K. Considérez que les variations d'enthalpie et d'entropie sont indépendantes de la température.

A l'équilibre, un volume de 10,0 L à 490 K renferme 1,00 gramme de MgO(s) et du CO_2 à une pression de 0,0258 bar.

b) Le volume est ensuite comprimé de manière isotherme jusqu'à ce qu'il occupe 0,100 litre. Quelle masse de $MgCO_3$ se forme-t-il ?

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : .....

8 /20

QUESTION 8 *(20 points)* (Q2)

a) A 700 K, l'acétaldéhyde se décompose en méthane et en monoxyde de carbone selon la réaction suivante :

$$CH_3CHO(g) \rightarrow CH_4(g) + CO(g)$$

Un échantillon de CH_3CHO est chauffé à 700 K et à une pression de 0,22 atm avant que la réaction s'amorce. On surveille ensuite la cinétique de la réaction en mesurant la pression totale et on obtient les résultats suivants :

P_{tot} / atm	t / s
0,22	0
0,24	1000
0,27	3000
0,31	7000

Après un traitement de données rapide, l'observateur réalise immédiatement que la vitesse de la réaction évolue au cours du temps. Son logiciel lui indique aussi que le graphique portant le logarithme népérien de la pression du réactif en fonction du temps ne donne pas une droite.

a) Déterminez graphiquement la constante de vitesse et précisez ses unités en supposant que vous exprimez ici la vitesse de la réaction en $atm.s^{-1}$.
b) Donnez la loi de vitesse de cette réaction chimique.
c) Quelle serait la pression totale en fin de réaction (à l'équilibre) si celle-ci était complète ?

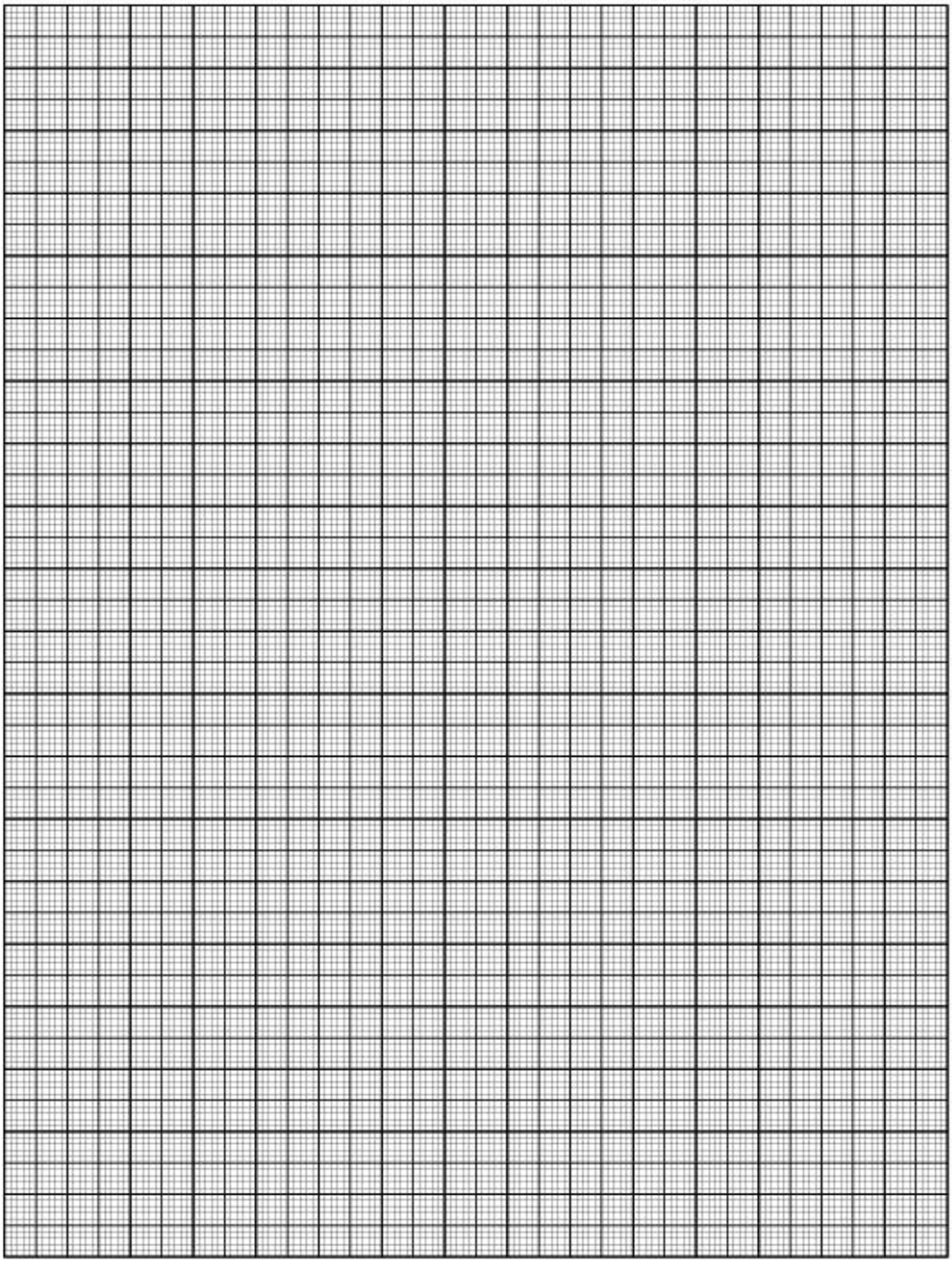
Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .....

QUESTION 8 (partie graphique)

Détermination de la constante cinétique de la décomposition de l'acétaldéhyde à 700 K

/



/

Liste de question de l'examen oral de chimie de Mr. Thierry Visart pour les BA1

-Qu'est-ce qu'un indicateur coloré ?
-Parler des Equilibre liquide vapeur.
-Parler des différents types de solides (Q1) .
-Démontrer la formule de Nernst, qu'est-ce que l'énergie libre concrètement, expliquer la pile à combustion, la réaction de Vaporeformage et qu'est-ce que l'acide perchlorique (donner sa formule) es-ce un acide fort ou faible ? et pourquoi?
-Quels sont les critères de spontanéité des réactions et équation d'Haber-Bosch (son enthalpie est négative à 400 °C :P)
-Expliquer la courbe de titrage d'un polyacide
-Parler des équilibres chimiques + comment varie la constante cinétique en fonction de la température
-Expliquer l'influence du pH sur la solubilité précipitation. Puis : pourquoi la dissolution de certaines molécules est-elle exothermique alors que pour d'autres elle est endothermique ? Comment d'ailleurs expliquer qu'une dissolution peut-être exothermique alors que pour casser une liaison, il faut toujours fournir de l'énergie?
-Gibbs-Duhheim, expliquer le potentiel chimique, comment déterminer la spontanéité d'une réaction, dessiner l'électrolyse de l'eau, dire où se trouve la cathode.
-Comment modifier la vitesse d'une réaction ?
Et après expliquer l'électrophorèse (mais version : comment puis-je casser des acides aminés?)
-Lien entre acidité et structure (question tirée) puis il a embrayé sur les réductions (quel alcalin est plus réducteur) puis les complexes (levée de dégénérescence et coloration)
-Faire et expliquer le diagramme de phase du CO2.
Petite question : Une redox en milieu basique (ClO-/Cl-) & comment mesurer la distance des liaisons dans le NaCl (=> Loi de Bragg)
-Expliquer les mécanismes réactionnels, donner les différentes hypothèses et illustrer par un exemple (avec toutes les formules, tout réinjecter, etc., …) Et puis pression osmotique et une application avec la membrane semi-perméable
-Expliquer les différentes liaisons chimiques puis, j'ai parlé du lien H. Il a demandé s'il y avait des molécules en bio ayant des liens H : acide aminé puis, dessiner un acide aminé, parler de l'électrophorèse, courbe de titrage diacide, pH isoélectrique, et constante de vitesse selon Arrhenius
-Comparez solubilité gaz et sel (pression, température, solvatation)
-Interpréter la formule de la loi de distribution des vitesses de Maxwell.
-Qu'est ce qu'un équilibre chimique + procédé d'Haber-Bosch ?
-Qu'est ce que l'énergie de résonance ?(Q1)
-Parler du modèle de collision en phase gazeuse en cinétique chimique
-Qu'est-ce qu'un indicateur coloré(risque de question exercice ou il faut trouver quel indicateur coloré faut-il utiliser par rapport a tel réaction)
-Orbital de tel élément + donner nombre quantique
-Un calcul thermodynamique pour trouver le k de la réaction (calcul à faire sans calculette mais tables disponible)

-Une courbe de pH
-Déterminer le pH à partir duquel un précipité se forme
-Expliquer le pH isoélectrique et application aux acides aminés (parler d'électrophorèse et de zwitterion)
-Expliquer les liaisons H
-Dire ce qui se passe quand on met un bloc de Na dans de l'eau (c'est une redox à équilibrer)
-Rapport entre k cinétique et K équilibre
-Courbe de titrage d'un polyacide (tout déballé de A à Z et j'ai pris H3PO4 comme exemple), et puis expliquer le procédé de Haber-Bosch par une approche thermo et cinétique
-Lien entre énergie chimique, travail utile et énergie électrique, comment trouver le pH d'une sol avec une concentration inconnue de Cu2+, expliquer les complexes
-Redox en milieu basique (CrO2 - / Cr (s))
-Pile combustible, le procédé de Haber-Bosch et tout ce qui est enthalpie libre et lien avec potentiel et la démo, Le Chatelier..
-Théorie du champ cristallin (Q1)
-Parler de l'enthalpie libre de Gibbs, faire des liens avec l'entropie et l'enthalpie puis dire tout ce que ça implique d'un point de vue Energie, en parlant aussi des oxydations d'un point de vue spontanéité. Ensuite on est passés sur le premier chapitre de chimie descriptive en bifurquant par un petit développement du principe d'Hall&Héroult niveau utilité, ...
-Diagramme de phase de l eau + Propriétés colligatives
-Quelle est la couleur d'un complexe dont l'ion métallique central est zn2+ ? (Connaissant sa configuration électronique)
-Courbe de titrage d'un polyacide + calculer le pH de solubilité d'un sel, loi de déplacement de Wien, Stephan Boltzmann, effet de paire inerte.
-Qu'est ce que la Loi de Raoult et quelles sont ses limites ?
-Quelles sont les interactions présentes dans une solution idéale, tracer le graphique de l'Energie en fonction de la distance, redox en milieu basique ?
-Que se passe-t-il quand on met du carbonate de calcium dans l'eau?
Réaction du carbonate avec un acide Fort, eau de Javel (redox) , exemple d'oxydants et réducteurs forts.
-Comment mesurer et calculer le pH, donner les demi réactions dans le pH-mètre, faire le lien entre le potentiel et la concentration en H+, parler du procédé Haber-Bosch et à quoi sert un catalyseur.
-Pourquoi les composés azotés sont utilisés dans les explosifs et les carburants +exemple, comparer acidité phénol acide picrique. Expliquer les indicateurs colorés et expliquer pourquoi il y a une différence de couleur (+exemple de composés à chromophore).
-Qu'est ce qu'une électrode de référence? Expliquer pourquoi ESH n'est pas une bonne électrode pour pH (j'avais fait l'erreur) Qu'est ce qu'un indicateur coloré? Pourquoi sont-ils coloré? Qu'est ce qu'un mélange tampon ? Différence de taille entre vanadium et fer (Expliquer)
-Relation Gibbs-dunheim (démonstration et dire a quoi ça sert), pile galvanique, allotropes (diagramme et explications)
-Les facteurs influençant la vitesse d une réaction, lier la distribution de vitesse par rapport à la température dans la théorie cinétique des gaz, datation au carbone 14
-Expliquer les processus de fission et fusion nucléaire (question préparée) et ensuite, effusion + fonctionnement d'une centrale nucléaire.

N° 488

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2019/2020

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, MATHEMATIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 28 octobre 2019

NOM, Prénom : .....

Section et numéro de matricule : 1

ATTENTION : Pour toutes les questions, soignez votre écriture ET votre orthographe

QUESTION 1 *(15 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels.*

Un étudiant effectue le titrage d'une solution aqueuse d'HCl de concentration inconnue à l'aide d'une solution aqueuse de NaOH. La concentration de la solution d'hydroxyde de sodium est de 0,1010 mol/L. L'étudiant place donc 40,00 mL de la solution d'HCl dans un erlenmeyer et y ajoute quelques gouttes de phénolphtaléine. Après avoir ajouté dans cette solution 19,8 mL de solution de NaOH à l'aide d'une burette, l'indicateur coloré passe d'incolore à mauve.

1) Ecrivez les équations chimiques moléculaire et ionique nette de la réaction.
2) Définissez l'équivalence. *(2 lignes maximum)*
3) Déterminer la concentration de la solution d'acide titrée ainsi que le pourcentage en masse de HCl dans la solution acide de départ.
   On considère que la solution de HCl a la même densité que l'eau.
   (Il n'est pas nécessaire d'effectuer un calcul d'erreur.)

(M H = 1,0079 g/mol ; M Cl = 35,4530 g/mol)

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

L'iridium-192 ($^{192}_{77}Ir$) est notamment utilisé en radiothérapie. Il se désintègre en platine-192 par émission d'une particule β^-.

a) Écrire l'équation de désintégration correspondante.
b) Donner le nombre de protons et de neutrons de l'iridium-192.
c) Calculer la demi-vie de l'iridium-192 et la masse initiale d'un échantillon sachant qu'après 7 jours, il en reste 2,81 g, et, après 365 jours, 0,0973 g.

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Complétez le tableau suivant :

	O_3	NO_2	$AlCl_3$	H_3O^+
Structure de Lewis				
Charge formelle	O(1) : O(2) : O(3) :	N : O(1) : O(2) :	Al : Cl(1) : Cl(2) : Cl(3) :	H(1) : H(2) : H(3) : O :
Géométrie (nom)				
Structure de résonance (entourer la bonne réponse)	Oui - Non	Oui - Non	Oui - Non	Oui - Non
Hybridation de l'atome central				

NB : dans la classification périodique, l'aluminium se trouve dans la même colonne que le bore.

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(13 points)*

Dans le modèle des orbitales moléculaires, comment calcule-t-on l'ordre de liaison (écrivez la formule et explicitez les termes).

Pour répondre aux questions suivantes, entourez la bonne réponse. (Attention ces questions sont « à choix multiple » ; choisir une mauvaise réponse entraîne une perte de points.)

Dans l'équation des gaz parfaits, pV=nRT, V représente :

a) la vitesse des molécules frappant la paroi
b) le volume du récipient dans lequel se trouve le gaz
c) la ventilation de la pièce dans laquelle se trouve le gaz.

Dans le modèle du champ cristallin, en présence d'un champ octaédrique, les orbitales :

a) d_z^2 et $d_x^2-_y^2$ ont plus d'énergie que les orbitales d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}
b) d_z^2 et $d_x^2-_y^2$ ont autant d'énergie que les orbitales d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}
c) d_z^2 et $d_x^2-_y^2$ ont moins d'énergie que les orbitales d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}

Connaissant l'ordre de liaison, pour une liaison entre deux atomes identiques :

a) la longueur de liaison augmente quand l'ordre de liaison augmente
b) la longueur de liaison diminue quand l'ordre de liaison augmente
c) la longueur de liaison ne dépend que du nombre d'électrons non appariés.

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Le travail d'extraction d'un électron de la surface du magnésium vaut 3,66 eV.

1) Sachant cela, calculer la longueur d'onde critique à utiliser pour qu'il y ait émission d'un électron.

2) Calculer la longueur d'onde et la fréquence du rayonnement à utiliser pour qu'un électron émis de la surface du magnésium ait une vitesse de $9{,}05 \times 10^5$ m.s^{-1}.

1eV = $1{,}602176487 \times 10^{-19}$ J
Constante de Planck h = $6{,}62606896.10^{-34}$ J.s
Vitesse de la lumière dans le vide c = $2{,}99792458.10^{8}$ m.s^{-1}
Masse de l'électron me = $9{,}1093897.10^{-31}$ kg

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019
NOM, Prénom: .....

Section et numéro de matricule : 6

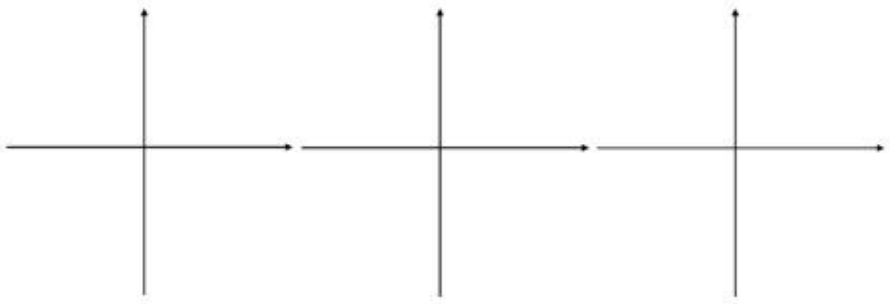
QUESTION 6 *(12 points)*

Ecrivez la structure électronique fondamentale du silicium (Z=14) et identifiez la couche de valence.

Donnez un ensemble de nombres quantiques permettant d'identifier les électrons de valence à l'état fondamental.

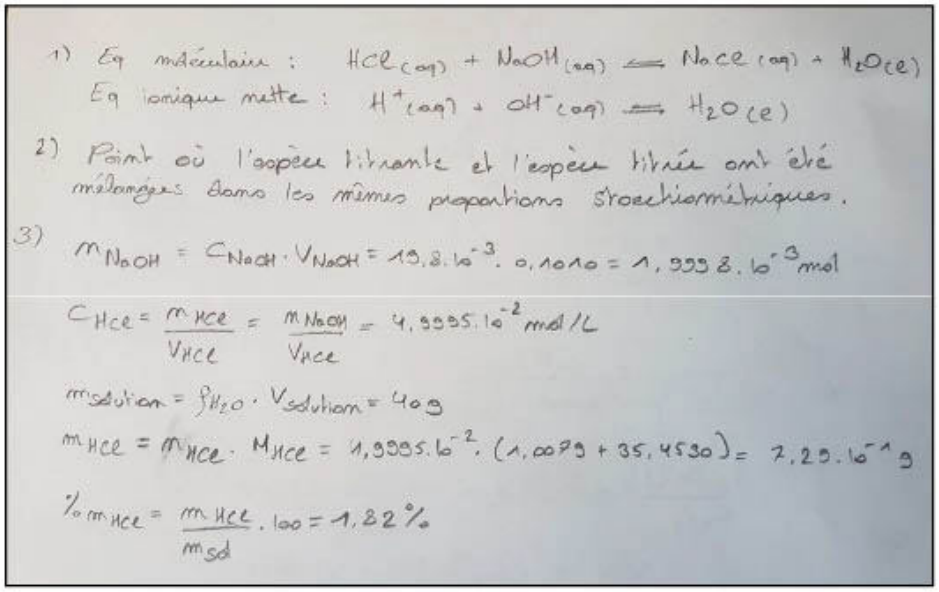
Un électron de valence du Si est excité dans l'orbitale définie par les nombres quantiques n=3 et l=2, donnez une des configurations électroniques excitées.

Pour le même atome, dessinez sur une même échelle, la forme des orbitales 2s, 3s et $3p_y$.
Identifiez clairement les orbitales dessinées dans ces repères cartésiens :



Correction de l'interro de chimie de novembre 2019

Question 1



1) Eq moléculaire : $HCl_{(aq)} + NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons NaCl_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

Eq ionique nette : $H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$

2) Point où l'espèce titrante et l'espèce titrée ont été mélangées dans les mêmes proportions stoechiométriques.

3) $m_{NaOH} = C_{NaOH} \cdot V_{NaOH} = 19,8.10^{-3} \cdot 0,1010 = 1,9998.10^{-3}$ mol

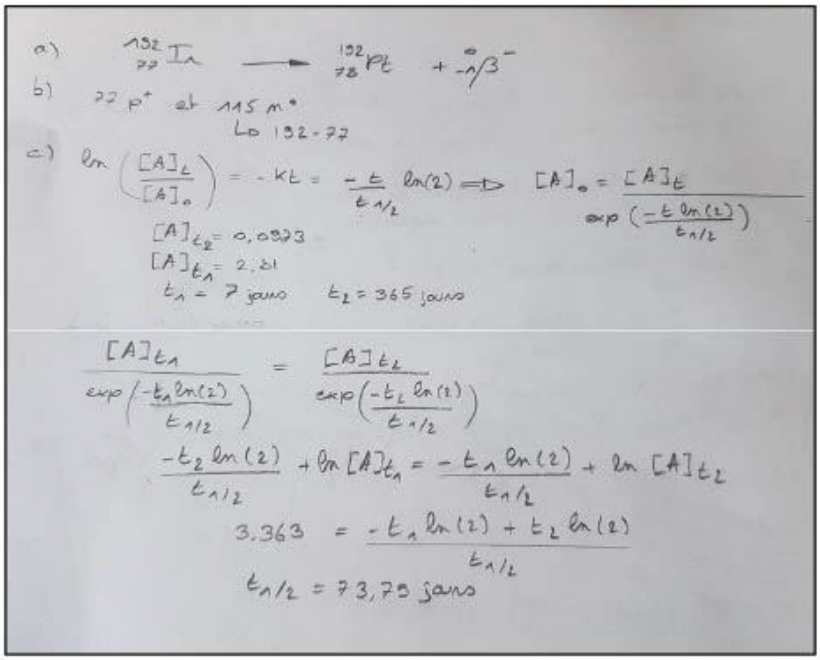
$C_{HCl} = \frac{m_{HCl}}{V_{HCl}} = \frac{m_{NaOH}}{V_{HCl}} = 4,9995.10^{-2}$ mol/L

$m_{solution} = \rho_{H_2O} \cdot V_{solution} = 40$ g

$m_{HCl} = m_{HCl} \cdot M_{HCl} = 1,9995.10^{-2} \cdot (1,0079 + 35,4530) = 7,29.10^{-1}$ g

$\%_m m_{HCl} = \frac{m_{HCl}}{m_{sol}} \cdot 100 = 1,82\ \%$

Question 2



a) $^{132}_{77}Ir \longrightarrow {}^{132}_{78}Pt + {}^{0}_{-1}\beta^-$

b) 77 p^+ et 115 n^0

Le 192-77

c) $\ln\left(\frac{[A]_t}{[A]_0}\right) = -kt = \frac{-t}{t_{1/2}}\ln(2) \Rightarrow [A]_0 = \frac{[A]_t}{\exp\left(\frac{-t\ln(2)}{t_{1/2}}\right)}$

$[A]_{t_2} = 0,0923$

$[A]_{t_1} = 2,81$

$t_1 = 7$ jours $\quad t_2 = 365$ jours

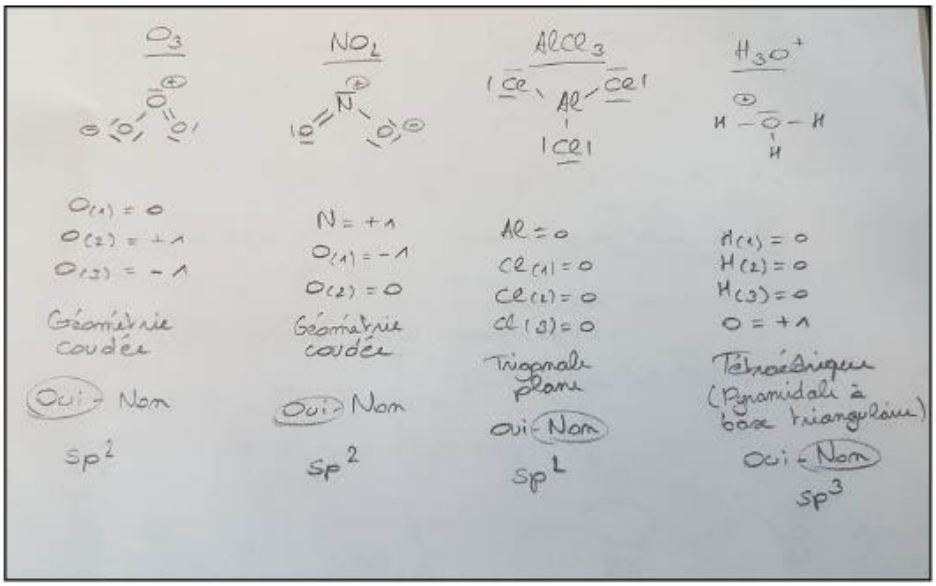
$$\frac{[A]_{t_1}}{\exp\left(\frac{-t_1\ln(2)}{t_{1/2}}\right)} = \frac{[A]_{t_2}}{\exp\left(\frac{-t_2\ln(2)}{t_{1/2}}\right)}$$

$$\frac{-t_2\ln(2)}{t_{1/2}} + \ln[A]_{t_1} = \frac{-t_1\ln(2)}{t_{1/2}} + \ln[A]_{t_2}$$

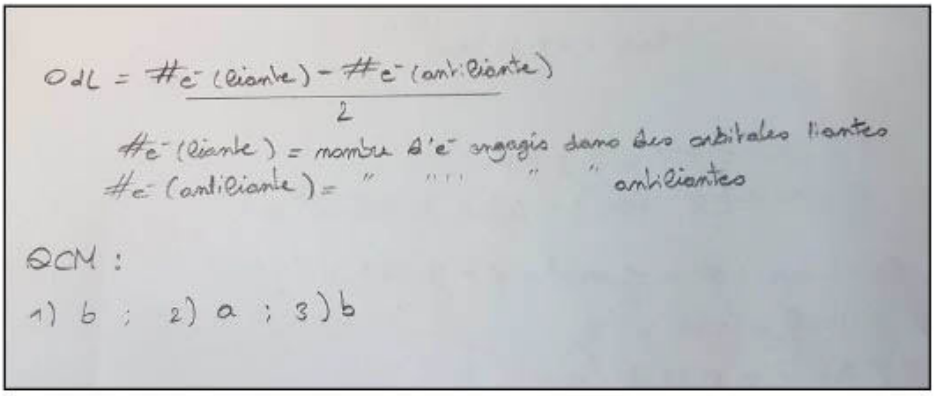
$$3,363 = \frac{-t_1\ln(2) + t_2\ln(2)}{t_{1/2}}$$

$t_{1/2} = 73,79$ jours

Question 3



Question 4



Question 5

1) $3.66\ eV = 5,856.10^{-19}\ J = \phi$

$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = 9,05.10^{-7}\ m$

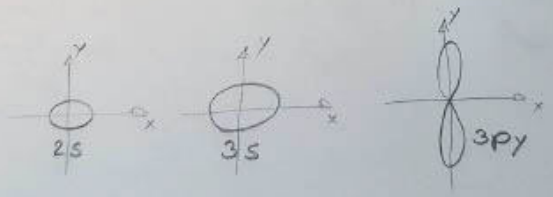
2) $E = E_{cin} + \phi = \frac{1}{2} m v^2 + \phi = 9,582.10^{-19}\ J$

$\nu = \frac{E}{h} = 1,45\ 10^{15}\ Hz$

$\lambda = \frac{c}{\nu} = 5,53.10^{-7}\ m$

Question 6

- $Si \Rightarrow 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1\ 3p^2$ (couche de valence)
- $n=3, \ell=0 \rightarrow m_\ell = 0$ ou $\ell=1 \rightarrow m_\ell = -1;0;1$ ou $(\ell=2 \rightarrow m_\ell = -2;-1;0;1;2)$ avec $m_s = \pm 1/2$

  Le vide dans l'atome fondamental
- $Si^* \Rightarrow 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^1\ 3d^1$
- 

###

Faculté des Sciences

Année académique 2020/2021

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

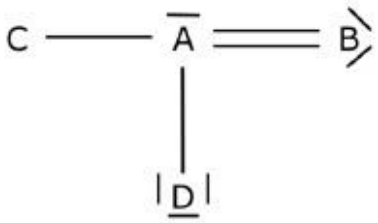
Première partie – Théorie

NOM, Prénom: ..... /24

Section et numéro de matricule : .....

QUESTION 1 *(24 points)*

Soit la molécule imaginaire possédant une structure de Lewis représentée ci-dessous

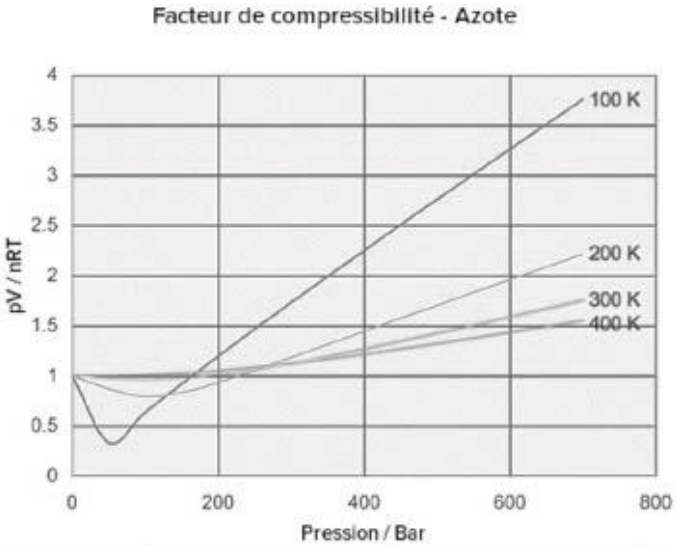


En sachant que l'élément D fait partie de la famille des halogènes :

Entourez toutes les affirmations correctes. *Attention, entourer une réponse incorrecte induit une perte de points. Une bonne réponse = +3 points , une mauvaise réponse = -3 points*

1) A est plus électronégatif que B
2) D est plus électronégatif que A
3) D est plus électronégatif que C
4) L'élément A est situé dans la première ou deuxième période du tableau périodique
5) L'élément A est situé dans la 3ième période, ou une période plus grande, du tableau périodique
6) L'atome A a sa couche de valence complétée
7) L'atome B a son octet complété
8) L'atome C a sa couche de valence complétée
9) L'atome B pourrait être hybridé sp
10) L'atome C pourrait être hybridé sp^3
11) L'atome A pourrait être hybridé sp^2d
12) L'atome A pourrait être hybridé sp^3
13) La molécule possède un dipôle permanent
14) Il est possible de calculer la charge formelle de l'atome D avec les informations données
15) Il est possible de calculer la charge formelle de l'atome A avec les informations données

QUESTION 2 *(20 points)*



	a /atm·L^2·mol^{-2}	b /L·mol^{-1}	$T_{éb}^{1\ atm}$/K
He	0,0341	0,0237	4
Ar	1,345	0,0322	87
H_2	0,244	0,0266	20
N_2	1,39	0,0391	77

Le facteur de compressibilité permet de comparer le comportement d'un gaz réel au comportement d'un gaz parfait. Sur ce graphique quatre courbes isothermes portent le facteur de compressibilité ($Z = PV/nRT$) en fonction de la pression.
A partir de ce graphique et de vos connaissances sur les gaz vues en cours ; répondez aux questions suivantes :

a) Quelle est la valeur du facteur de compressibilité dans le cas des gaz parfaits ?

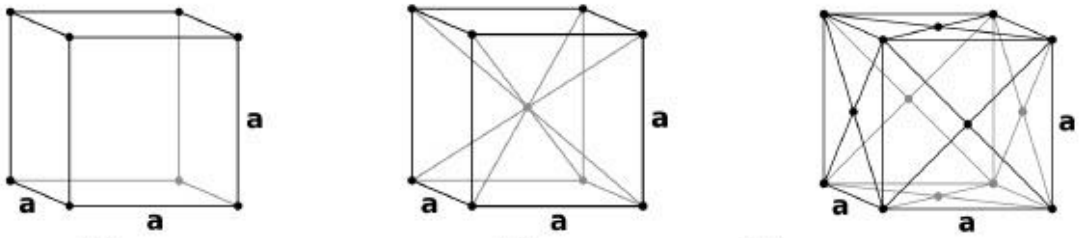
b) Selon le graphique, à quelle température correspond le tracé où le N_2 se rapproche le plus d'un gaz parfait ?

c) en vous basant sur le tableau ci-dessus, à la température de 77 K, est-ce que la pression de vapeur de l'azote est supérieure, égale ou inférieure à 1 atm ? Justifiez

d) Écrivez l'équation d'état des gaz réels (équation de Van der Waals) ? Identifiez les symboles.

e) Parmi les gaz suivants, lequel aura le comportement le plus proche du gaz parfait ? Justifiez
CH_4 à 2 atm, NH_3 à 2 atm, CH_4 à 1 atm et H_2O à 1 atm

QUESTION 3 *(15 points)*



(1) **(2)** **(3)**

a) Nommez les mailles élémentaires ci-dessus et donnez le nombre d'atomes par maille

Structure (1) :

Structure (2) :

Structure (3) :

b) Sachant que le NaCl peut être vu comme une structure cubique à faces centrées d'ions chlorure avec des cations sodium dans les sites octaédriques, ou comme une structure de type cubique simple de Na et de Cl, dessinez la maille du NaCl.

c) Si l'on représente la structure cristalline du NaCl par une maille élémentaire de type CFC d'ions chlorure, combien de cations sodium doit-on compter dans cette même maille ? Justifiez votre réponse.

QUESTION 4 *(24 points)*

Cochez la case à côté de la réponse correcte. Il n'y a qu'une réponse correcte par énoncé.
Réponse correcte = +3 points, réponse incorrecte = -2 points, pas de réponse = 0 point

a. La chaleur d'une réaction chimique à volume constant dépend :
   - ☐ Uniquement de l'enthalpie
   - ☐ De l'enthalpie et de la variation du nombre total de moles
   - ☐ De l'enthalpie et de la variation du nombre de moles de solide
   - ☐ De l'enthalpie et de la variation du nombre de moles de gaz

b. Vous souhaitez calculer le volume d'un gaz parfait sur base d'une pression de 0,45 bar en utilisant l'équation des gaz parfaits. Comment allez-vous procéder ?
   - ☐ Utiliser la pression en bar, R=8,314 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en atm, utiliser R=8,314 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en atm, utiliser R=8,314 pour obtenir un volume en m^3
   - ☐ Convertir la pression en atm, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en Pa, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en Pa, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en m^3

c. Dans un diagramme de phase pression - température, la variance sur la courbe d'équilibre liquide – gaz vaut :
   - ☐ 1
   - ☐ 2
   - ☐ 3
   - ☐ 0
   - ☐ 1,5

d. La tension de vapeur d'un composé dépend :
   - ☐ Uniquement de la masse totale du composé
   - ☐ Uniquement des interactions intermoléculaires
   - ☐ Uniquement de la température
   - ☐ Des interactions intermoléculaires et de la température
   - ☐ De la masse totale du composé et de la température
   - ☐ De la masse totale du composé, des interactions intermoléculaires et de la température

e. Le plan (3 0 0)
   - ☐ Coupe l'axe x à une distance correspondant à 3 fois le paramètre de maille
   - ☐ Ne coupe pas l'axe X, mais coupe l'axe Y
   - ☐ Ne coupe pas l'axe Y, mais coupe l'axe Z
   - ☐ Ne coupe pas l'axe Z, mais coupe l'axe Y
   - ☐ Ne coupe ni l'axe Y, ni l'axe Z

QUESTION 4 *(suite)*

f. Laquelle des propositions suivantes reprend les conditions standard :

- ☐ C = 1 mol/L, P = 1 atm, T = 298,15 K ;
- ☐ C= 1 mol/L, P = 1 bar, T = 273,15 K ;
- ☐ P = 1 atm, T = 298,15 K ;
- ☐ P = 1 bar, C = 1 mol/L.

g. D'après le principe d'exclusion de Pauli :

- ☐ deux électrons d'une même orbitale peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques ;
- ☐ deux électrons d'une même orbitale ne peuvent pas avoir 4 nombres quantiques identiques ;

h. Si vous vous reportez au tableau périodique, et sachant que le césium a une couche de valence de type « $6s^1$ », et que le chlore a le numéro atomique 17,

- ☐ l'énergie de première ionisation du chlore est inférieure à celle du césium
- ☐ l'énergie de première ionisation du chlore est supérieure à celle du césium
- ☐ l'énergie de première ionisation du chlore est identique à celle du césium

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 06 janvier 2020 – Théorie

NOM, Prénom: .....

/17

Section et numéro de matricule : .....

QUESTION 5 *(17 points)*

a) Dessinez le diagramme d'orbitales moléculaires de O_2^+.

b) Calculez l'ordre de liaison

c) Cette molécule est-elle para ou diamagnétique ? Justifier (en 2 lignes)

d) La longueur de liaison dans O_2^+ est-elle supérieure, inférieure, ou identique à celle de O_2. Justifiez (en 2 lignes maximum)

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2019/2020

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: ..... /25

Section et numéro de matricule : .....

QUESTION 1 *(25 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

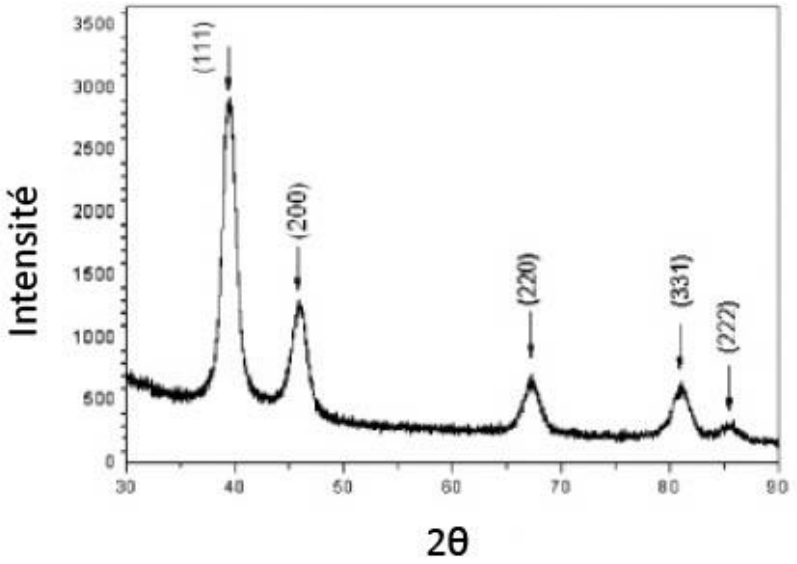
Un étudiant place un morceau de 5,00 g d'un métal inconnu issu de la colonne IIIA (terreux) du tableau périodique à l'état solide dans une solution d'acide fort concentrée et en excès.

Suite à cela, il récupère l'hydrogène ainsi obtenu qu'il fait réagir avec de l'oxygène en excès, afin de pouvoir transporter son produit de réaction (l'hydrogène étant extrêmement compliqué à stocker).
L'eau ainsi formée une fois refroidie occupe un volume de 5,00 mL.

Déterminez quel est le métal inconnu.

QUESTION 2 *(25 points)*

Voici un spectre de diffraction des rayons X d'un échantillon de nanoparticules de platine



Les nanoparticules ont des mailles élémentaires de type cubique à faces centrées et le rayonnement envoyé a comme énergie 8,04 keV. Sur base de ces données, déterminez le rayon cristallographique d'un atome de platine ? *Attention, ce rayon ne correspond pas à celui renseigné dans le tableau périodique.*

QUESTION 3 *(25 points)*

On effectue la combustion (complète) d'un mélange de $C_6H_6(l)$ et de $C_8H_{18}(l)$ en présence d'un excès d'oxygène. Les produits de réaction, tous gazeux sont ramenés à une température de 25,0°C dans un récipient de 0,500 m^3. A cette température, la pression de vapeur de l'eau est de 21,43 mm Hg. Sachant que l'enthalpie standard de formation du $C_8H_{18}(l)$ à cette température vaut 249,73 kJ/mol, que la combustion du mélange a dégagé 23,644 x 10^6 J, que les gaz peuvent être considérés comme parfaits, que la combustion se fait à pression constante et que la pression mesurée dans le récipient de récupération est de 2,0136 atm, déterminez la composition du mélange.

QUESTION 4 *(25 points)*

Quelques caractéristiques du dichlore, Cl_2, sont reprises ci-dessous :

- Enthalpie standard de vaporisation : 20,4 kJ/mol
- Enthalpie standard de fusion : 6,4 kJ/mol
- Température de fusion : -101 °C
- Température de vaporisation normale : -34,5 °C

Parmi ces informations, certaines sont utiles pour répondre aux questions suivantes :

a) Dans quel(s) état(s) physique(s) se trouve 1,0 kg de dichlore contenu dans une bouteille fermée en acier de 10,0 L à 20 °C ?

b) Une fissure laisse s'échapper 220 g de dichlore par heure. Il a fallu 4 heures pour qu'un technicien s'en aperçoive et rebouche finalement la fissure. Dans quel état physique se trouve alors le dichlore restant dans la bouteille, à la même température de 20 °C ?

Justifiez toutes vos réponses par calcul.

CORRECTION DE L'INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

Première partie –Théorie

Question 1

Bonnes réponses : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ; 13 ; 14

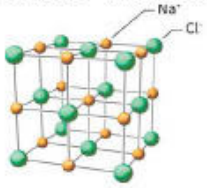
Question 2

a) Z=PV/nRT car Z=1 pour les gaz parfaits
b) A basse pression et haute température
c) La pression de vapeur de l'azote (N_2) est égale à 1 atm
d) $\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

   a= paramètre d'interactions moléculaires ; b=covolume…

e) CH_4 à 1 atm puis CH_4 à 2 atm puis NH_3 à 2atm et enfin H_2O à 1atm car le méthane a moins d'interactions intermoléculaires que l'ammoniac qui a lui-même moins d'interactions intermoléculaires que l'eau. Ensuite, plus la pression est basse, plus son comportement s'apparentera à celui d'un gaz parfait, dans de tels ordres de grandeurs du moins (cfr graphique de l'azote).

Question 3

a) Cubique simple – 1 atome par maille ; Cubique centré – 2 atomes par maille ; Cubique à faces centrées – 4 atomes par maille
b) 

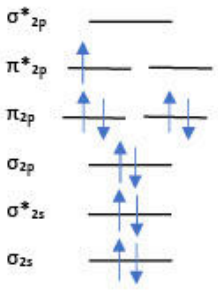
c) D'un point de vue stœchiométrique, Na^+ et Cl^- ont un rapport de 1. Ainsi, si un CFC contient 4 atomes par maille (cfr Q3.a), il y aura 4 atomes d'ions chlorures et donc 4 atomes d'ion sodium.

Question 4

a) (Réponse 4) De l'enthalpie et de la variation du nombre de moles de gaz.
b) (Réponse 4) Convertir la pression en atm, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en L.
c) (Réponse 1) 1
d) (Réponse 4) Des interactions intermoléculaires et de la température.
e) (Réponse 5) Ne coupe ni l'axe Y, ni l'axe Z.
f) (Réponse 4) P = 1 bar, C = 1 mol/L.
g) (Réponse 2) Deux électrons d'une même orbitale ne peuvent pas avoir 4 nombres quantiques identiques.
h) (Réponse 2) L'énergie de première ionisation du chlore est supérieure à celle du césium.

Question 5

O_2^+ - 11 électrons



b) Ordre de liaison= (8-3)/2=2,5

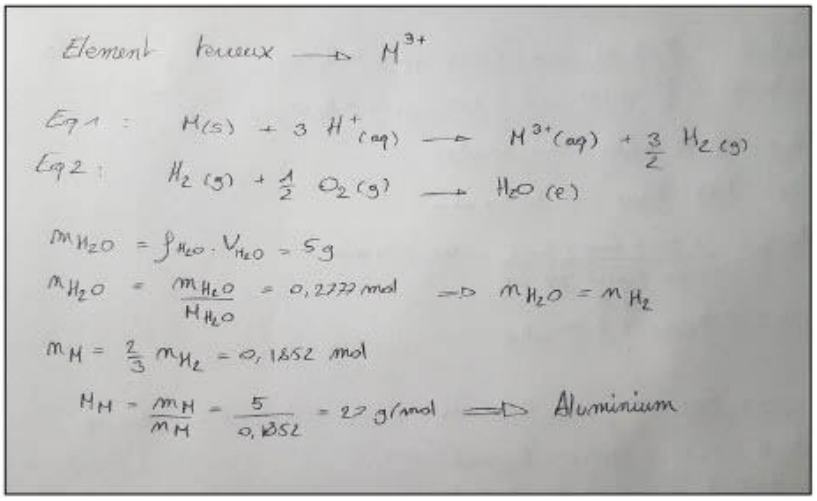
c) 1 électron non apparié, paramagnétique

d) La longueur de liaison étant inversement proportionnelle à l'ordre de liaison et que l'ordre de liaison de l' O_2 est de 2, la longueur de notre liaison est inférieure à celle du dioxygène.

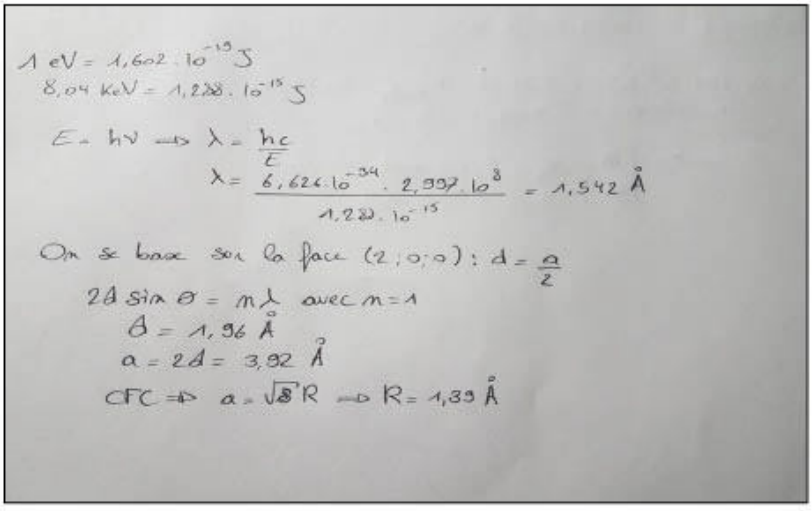
CORRECTION DE L'INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

Seconde partie –Exercices

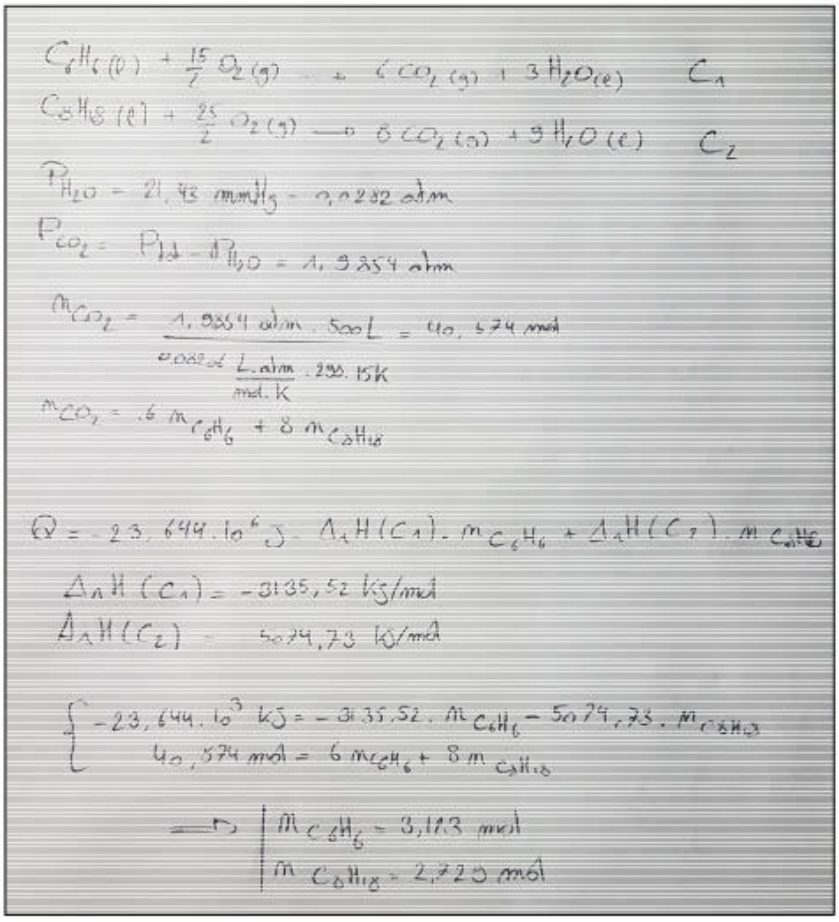
Question 1



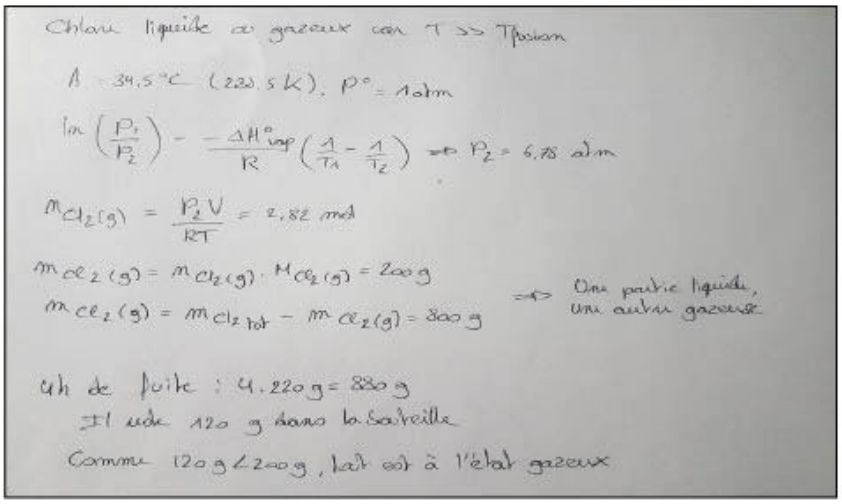
Question 2



Question 3



Question 4



ULB

Faculté des Sciences Année académique 2019-2020

PREMIERES ANNEES DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATIONBIOINGENIEUR) ET PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE DE MAI 2020

Question 1

Un étudiant souhaite effectuer un 1,00 L de mélange tampon à un pH de 4,50. Pour cela, il dispose de :

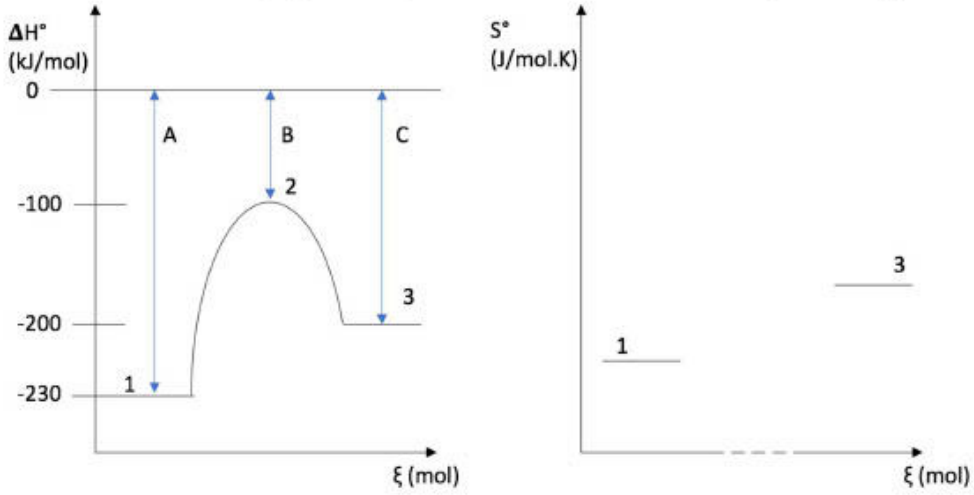
- 3,00 g d'acide arsénique
- 3,00 g d'acide malique
- 3,00 g d'acide salicylique
- 3,00 g d'acide maléique
- NaOH 1,00 mol/L
- HCl 1,00 mol/L
- eau distillée

a) Quel acide va-t-il utiliser ?
b) Quel est le volume de HCl ou NaOH qu'il va utiliser s'il utilise la totalité de la masse d'acide ?

a) Quel acide va-t-il utiliser ? Acide malique
b) Quel est le volume de HCl ou NaOH qu'il va utiliser s'il utilise la totalité de la masse d'acide ? 26,8 mL de NaOH 1,00 mol/L

Question 2

Soient les diagrammes réactionnels suivants associés à une même réaction sur lesquels A, B et C sont des différences selon l'axe y représentées par les flèches bleues, et 1, 2 et 3 des espèces chimiques.



(ξ est l'avancement de la réaction)

La mention "cette réaction" fera référence à la réaction allant de 1 vers 3. La mention « réaction inverse » fera quant à elle référence à la réaction allant de 3 vers 1.

Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Une bonne réponse vous fera gagner 1 point pour les vrai ou faux et 2 points pour les QCM. Une mauvaise réponse vous fera perdre ce même montant de points. En cas d'incertitude, vous pouvez cocher la case "ne se prononce pas", qui ne vous fera ni gagner ni perdre de points. Notez que la note finale de la question 5 sera au moins de 0.

- Suffisamment d'informations sont fournies pour affirmer que la valeur de la constante d'équilibre de cette réaction est supérieure à 1 :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- Cette réaction est endothermique
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- En supposant que les molécules 1 et 3 sont constituées d'une seule liaison, on peut affirmer que la liaison dans 1 est moins forte que celle dans 3 :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- La réaction inverse n'est spontanée qu'à basse température :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas

- L'augmentation de la température favorise thermodynamiquement cette réaction :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- L'augmentation de la température augmente la vitesse de la réaction inverse :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- L'ajout d'un catalyseur modifierait l'enthalpie de réaction de cette réaction :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas

Cochez la bonne réponse parmi les propositions.

1) Si l'espèce 1 est un gaz :
   - L'espèce 3 est nécessairement un gaz
   - L'espèce 3 peut être un solide, un liquide ou un gaz
   - L'espèce 3 peut être un solide ou un liquide
   - L'espèce 3 peut être un liquide ou un gaz
   - Ne se prononce pas
2) B représente :
   - L'enthalpie de la réaction
   - L'énergie d'activation de la réaction
   - Le complexe activé
   - Aucune des autres propositions
   - Ne se prononce pas
3) Suite à une augmentation de la température :
   - La vitesse de cette réaction augmente plus que la vitesse de la réaction inverse
   - La vitesse de la réaction inverse augmente plus que la vitesse de cette réaction
   - Les vitesses de cette réaction et de la réaction inverse augmentent d'une même valeur
   - On ne dispose pas d'assez d'informations pour répondre à cette question
   - Ne se prononce pas
4) Quelles informations manque-t-il pour pour calculer la constante k ?
   - La température et l'énergie d'activation
   - La température et la concentration de l'espèce 1
   - Le facteur pré exponentiel d'Arrhenius et la température
   - L'énergie d'activation et la constante d'équilibre
   - Ne se prononce pas

Question 3

Un chimiste veut solubiliser un sel de type $M(OH)_2$ dans 1,00L d'eau pure. Après avoir mis le sel en solution et agité, il reste du solide au fond du récipient et le pH de la solution est à 9,113 à 25°C.

Le chimiste se débarrasse du solide non dissous et décide d'effectuer un titrage sur 200mL de la solution récupérée avec du HCl $5{,}00 \times 10^{-4}$ mol/L.

a) Quelle est la concentration en OH^- au départ ?
b) Que vaut le Ks ?
c) Quelle est l'identité de M ?
d) Quel est le volume de HCl ajouté pour atteindre l'équivalence (entre 1,00 et 100ml) ?

a) Quelle est la concentration en OH^- au départ ? $1{,}2971.10^{-5}$ mol/L
b) Que vaut le Ks ? $1{,}091.10^{-15}$
c) Quelle est l'identité de M ? Le cobalt
d) Quel est le volume de HCl ajouté pour atteindre l'équivalence (entre 1,00 et 100ml) ? 5,19 mL

Question 4

Les couples $AO_2(aq)/A_2O_3^{2-}(aq)$ ($E° = 0,643V$) et $HXO(aq)/X_2(g)$ ($E° = 0,831V$) sont en solution, à 25°C, dans deux compartiments séparés pour former la pile :

Pt(s)	$[AO_2(aq)] = 0,500$ mol.L^{-1} $A_2O_3^{2-}(aq)$ pH = 4,00 V = 20,0 mL	[HXO(aq)] = 0,200 mol.L^{-1} P_{X_2} = 1,00 bar pH = 3,00 V = 20,0 mL	Pt(s)

a) Quelles sont les réactions à la cathode, à l'anode et la réaction globale dans les conditions standards ?
b) Quel est le potentiel de la cathode dans ces conditions ?
c) Quelle sera la concentration de $A_2O_3^{2-}(aq)$ minimale pour que la pile fonctionne ?

a) Quelles sont les réactions à la cathode, à l'anode et la réaction globale dans les conditions standards ?

Cathode : $2HXO(aq) + 2H^+(aq) + 2e^- \rightleftharpoons X_2(g) + 2H_2O(l)$

Anode : $2AO_2(aq) + 2H^+(aq) + 4e^- \rightleftharpoons A_2O_3^{2-}(aq) + H_2O(l)$

Globale : $4HXO(aq) + 4H^+(aq) + A_2O_3^{2-}(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons 2AO_2(aq) + 2H^+(aq) + 2X_2(g) + 4H_2O(l)$

b) Quel est le potentiel de la cathode dans ces conditions ? E(cathode) = 0,612 V
c) Quelle sera la concentration de A2O32-(aq) minimale pour que la pile fonctionne ? $[A_2O_3^{2-}] = 2,99.10^{-7}$ mol/l

Question 5

Après 4 longues heures de travaux pratiques, un assistant rentre chez lui assez épuisé mais décide tout de même de corriger les rapports rendus par ses étudiants le soir même plutôt que de remettre cela à plus tard. La manipulation a porté sur l'étude de l'influence de la température sur la vitesse de la réaction de décomposition de l'acide phosphorique contenu dans une boisson gazeuse, réaction qui suit une cinétique d'ordre 0. Un binôme d'étudiants a rendu un rapport incomplet accompagné d'un graphique sans titre et sans unité aux axes. L'assistant décide cependant d'évaluer la pertinence de leurs mesures sur base du peu d'information à sa disposition.



a) A quoi correspondent les axes (grandeur + unité) ?
b) Que vaut l'énergie d'activation du processus étudié ?
c) Quelle est l'unité de la constante cinétique associée à ce processus ?

a) A quoi correspondent les axes (grandeur + unité) ? axe x : 1/T; axe y : ln(k)
b) Que vaut l'énergie d'activation du processus étudié ? Ea = 117 kJ/mol ; CA = -14072,6
c) Quelle est l'unité de la constante cinétique associée à ce processus ? mol/L s

Correction de l'examen de chimie de juin 2020

Question 1

a) Si pH = 4,5 : $[H_3O^+] = 3,16 \cdot 10^{-5}$ mol/L

$[H_3O^+] = K_a \frac{C_a}{C_b}$

→ Acide arsénique : $\frac{C_a}{C_b} = 6,12 \cdot 10^{-3}$

Acide malique : $\frac{C_a}{C_b} = 4,05$ (avec K_{a_2})

Acide salicylique : $\frac{C_a}{C_b} = 3,01 \cdot 10^{-2}$

Acide maléique : $\frac{C_a}{C_b} = 2,22 \cdot 10^{-3}$

⇒ L'acide malique et son K_{a_2} est le seul qui respecte la condition des mélanges tampons qui veut que $10^{-1} < \frac{C_a}{C_b} < 10^{1}$

b) $pH = 4,5 = pK_{a_2} + \log \frac{C_b}{C_a}$

$\frac{C_b}{C_a} = \frac{m_b}{m_a} = 2,47 \cdot 10^{-1}$

	$C_4H_4O_5(aq)$	+ $OH^-(aq)$	⇌ $C_4H_3O_5^-(aq)$	+ $C_4H_4O_5^{2-}(aq)$
n_i	$2,24 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot V_{NaOH}$	0	0
$n_{\leftrightarrows}$	0	0	$2,24 \cdot 10^{-2} - (V_{NaOH} - 2,24 \cdot 10^{-2}) = m_a$	$V_{NaOH} - 2,24 \cdot 10^{-2} = m_b$

⇒ $2,47 \cdot 10^{-1} = \frac{V_{NaOH} - 2,24 \cdot 10^{-2}}{4,48 \cdot 10^{-2} - V_{NaOH}}$

$V_{NaOH} = 26,5$ mL

Question 2

Faux
Vrai
Vrai
Vrai
Vrai
Vrai
Faux
Rep 2
Rep 3
Rep 3
Rep 1

Question 3

Question 3

a) $M(OH)_2(s) \rightleftharpoons M^{2+}_{(aq)} + 2\,OH^-_{(aq)}$

$pH = 9,113 \rightarrow pOH = 4,887$

$[OH^-] = 10^{-pOH} = 1,297 \cdot 10^{-5}$ mol/L

b) Sel de type $AB_2 \rightarrow K_S = 4s^3$

$K_S = 4\left(\frac{[OH^-]}{2}\right)^3 = 1,091 \cdot 10^{-15}$

c) Du cobalt, selon les tables

d) $n_{OH^-} = C_{OH^-} \cdot V = 0,2 \cdot 1,297\,10^{-5} = 2,594 \cdot 10^{-6}$ mol

$n_{OH^-} = n_{H^+}$ (point d'équivalence)

$V = \frac{n_{H^+}}{C_{H^+}} = 5,188 \cdot 10^{-3}$ L

Question 4

Question 4

b) $C_{HXO} = 0,2$ mol/L $\qquad Q = \frac{P_{X_2}}{[H^+]^2 [HXO]^2}$

$C_{H^+} = 10^{-3}$ mol/L

$E = 0,612$ V (grâce à Nernst)

c) $E_{cathode} > 0,612$ V

$0,612 = 0,643 - \frac{0,0592}{4} \cdot \log\left(\frac{x}{(10^{-4})^2 \cdot (0,5)^2}\right)$

$\frac{x}{(10^{-4})^2 \cdot (0,5)^2} = 1,243 \cdot 10^2$

$x = 3,1 \cdot 10^{-7}$ mol/L

ULB

Faculté des Sciences Année académique 2019-2020

PREMIERES ANNEES DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATIONBIOINGENIEUR) ET PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE D'AOUT 2020

Question 1

L'huile de noisette est composée d'acide oléique ($C_{18}H_{34}O_2$) et d'acide linoléique ($C_{18}H_{32}O_2$).

La combustion de 100g de ce mélange libère 3951,4 kJ.

Sachant que l'enthalpie réactionnelle de formation de $C_{18}H_{34}O_2$ vaut -764,8 kJ/mol et que celle de $C_{18}H_{32}O_2$ vaut -634,7 kJ/mol, que l'eau formée est sous forme liquide et que la transformation est réalisée dans les conditions standards à 298 K :

a) Ecrivez les équations de réaction
b) Calculez les fractions massiques des acides oléique et linoléique dans le mélange initial.

Question 2

Sur base des interactions intermoléculaires, expliquez avec vos mots pourquoi la température d'ébullition du méthanol (CH_3OH, masse molaire = 32 g/mol) est nettement supérieure à celle du méthanal (CH_2O, masse molaire = 30 g/mol).

Question 3

Sachant que 675 g d'eau se trouvent ans une enceinte de 12,0 m^3 dans laquelle l'air est saturé d'humidité à une température de 28°C, calculez la masse d'eau à l'état liquide et la masse d'eau à l'état gazeux. *L'enthalpie de vaporisation de l'eau vaut 44,01 kJ/mol et peut être considérée comme indépendante de la température.*

Question 4

L'électrophorèse est une technique chromatographique couramment utilisée pour séparer des espèces telles que des protéines, des nucléotides ou encore des acides aminés selon leur charge et pour des composés de même charge, selon leur taille.

Des étudiants en laboratoire parviennent à séparer les constituants d'un mélange d'acides aminés dont notamment de la cystéine. Pour la suite de leur manipulation, ces derniers doivent placer l'acide aminé en question dans une solution tampon (pH=6,30).

a) Sachant que le $pH_{isoélectrique}$ de la cystéine est de 5,07, quel sera le signe de la charge de cette dernière dans une solution tampon de pH=6,30 ? Justifiez
b) Proposez 2 réactifs à utiliser pour préparer la solution tampon de pH=6,30. Justifiez
c) Pour le système considéré au point b., que devrait être le rapport Ca/Cb (où Ca et Cb sont respectivement les concentrations analytiques des formes acides et basiques) ?

Question 5

Une pile de concentration fonctionnant avec le couple Ag^+/Ag est mise en place à 25°C.

Chaque compartiment est constitué d'une électrode d'argent plongeant dans un litre de solution de $AgNO_3$. Cette concentration vaut $1{,}00.10^{-1}$ mol/L dans le premier compartiment et $1{,}00.10^{-3}$ mol/L dans le second. Chaque compartiment occupe un volume de 1,00L.

a) Calculez la force électromotrice de la pile.
b) Quelle serait la force électromotrice de cette pile si l'on ajoutait $5{,}84.10^{-2}$g de $NaCl_{(s)}$ dans le second compartiment ? La variation de volume suite à cet ajout est considérée nulle.

Question 6

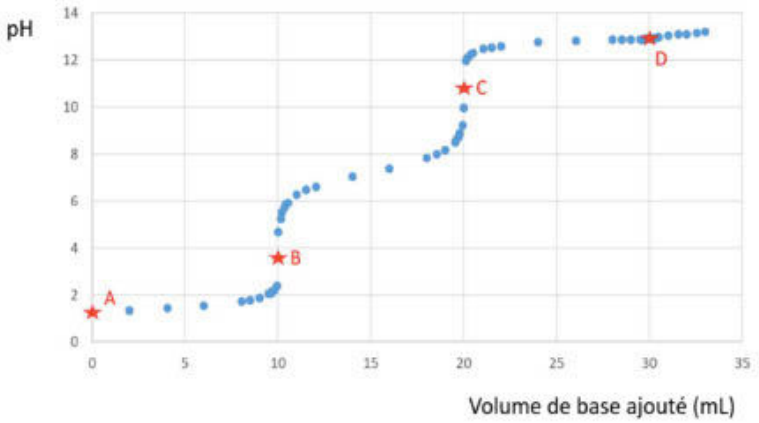
La décomposition d'un produit $A_{(g)}$ se fait en une étape élémentaire comme suit :

$$A_{(g)} \rightarrow B_{(g)} + C_{(g)}$$

a) Que vaut la constante de vitesse de réaction à 25,0°C si le facteur pré-exponentiel vaut $4{,}20.10^{12}\ s^{-1}$ et l'énergie d'activation vaut 102 kJ/mol ?
b) Que vaut la constante de vitesse de cette réaction à 120°C ?
c) Combien de temps faut-il pour consommer 25% du composé A à 120°C ?

Question 7

Soit le graphique suivant représentant la courbe d'un titrage d'une solution de 10,0mL d'un acide imaginaire A effectué par une base forte de concentration 0,5 mol/L. Les lettre A, B, C et D représentent les différentes espèces chimiques rencontrées au cours du titrage.



Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

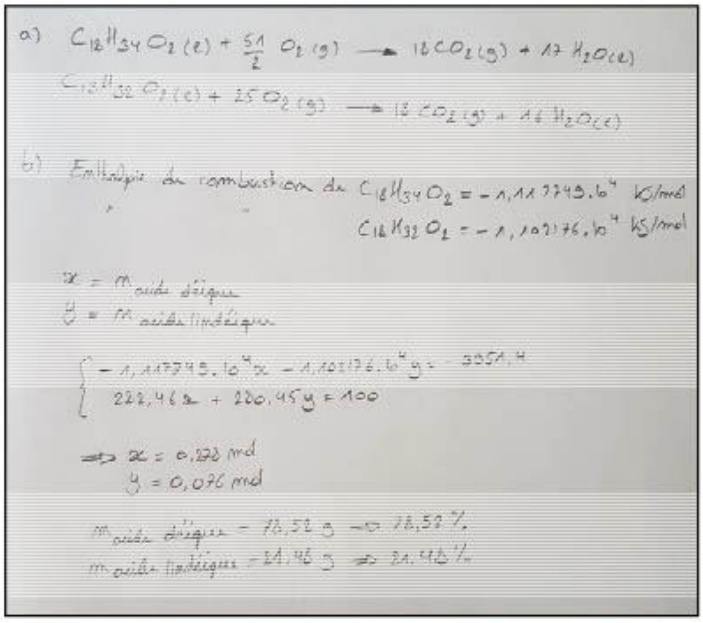
Une bonne réponse vous fera gagner 1 point pour les vrais ou faux et 2 points pour les QCM. Une mauvaise réponse vous fera perdre ce même montant de points. En cas d'incertitude, vous pouvez cocher la case 'Ne se prononce pas', qui ne vous fera ni gagner ni perdre de points. Notez que la note totale de cette question sera au moins de 0.

- A concentration équivalente, une solution de polyacide a toujours un pH plus élevé qu'une solution contenant un monoacide.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- On peut affirmer que le pKa de l'espèce C est supérieure à celui de l'espèce A.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- Suffisamment d'informations sont fournies pour affirmer que l'espèce A est un acide faible.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- L'indicateur coloré jaune titan (zone de virage 12,2-13,2) est adéquat pour déterminer expérimentalement la 3e équivalence.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- L'espèce B pourrait être du HY^{2-} (avec Y un groupement d'atomes imaginaires sans atome d'hydrogène)
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas

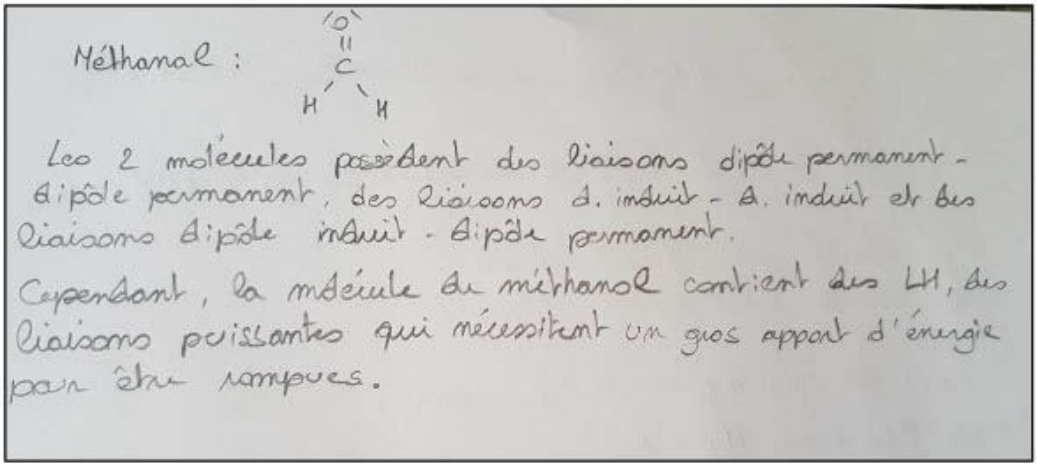
- Pour déterminer expérimentalement la première équivalence, du méthylorange a été utilisé. (Indicateur coloré rouge sous sa forme acide, jaune sous sa forme basique, zone de virage 3,2-4,4). A l'équivalence, on retrouve en solution :
    - Des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur jaune et des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur rouge.
    - Uniquement des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur orange.
    - Uniquement des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur rouge.
    - Des molécules de l'indicateur qui ne transmettent aucune couleur.
    - Ne se prononce pas.
- Pour tracer théoriquement cette courbe de titrage à une température donnée, il faudrait comme information :
    - Les pKa des différentes espèces et la concentration de la solution titrante.
    - La concentration de la solution titrante et le volume de la solution titrante ajouté.
    - Les concentrations des espèces titrantes et titrées, les pKa des différentes espèces, le volume de solution titrante ajouté.
    - Les concentrations des espèces titrantes et titrées, les pKa des différentes espèces, le volume de solution titrée.
    - Ne se prononce pas.
- Pour déterminer expérimentalement la première équivalence, on pourrait utiliser comme indicateur coloré (zone de virage indiquée entre parenthèses) :
    - Du pourpre de méta-crésol (1,2-2,8)
    - Du jaune de méthyle (2,9-4,0)
    - Du bleu de bromothymoll (6,0-7,6)
    - De la phénolphtaléine (8,0-9,6)
    - Ne se prononce pas
- Si l'espèce C est du HY^{2-} (avec Y un groupement d'atomes imaginaires sans atome d'hydrogène), alors :
    - L'espèce A est du H_3Y
    - L'espèce D est du Y^{2-}
    - L'espèce A est du H_3Y^{2+}
    - L'espèce B est chargée positivement
    - Ne se prononce pas
- Si l'on souhaitait préparer un mélange tampon à un pH de 7, il faudrait avoir en présence :
    - Des molécules des espèces A et B
    - Des molécules des espèces B et C
    - Des molécules de l'espèces B uniquement
    - Des molécules des espèces C et D
    - Ne se prononce pas

Correction de l'examen de chimie d'aout 2020

Question 1



Question 2



Question 3

$M_{H_2O} = 18,0152$ g/mol

$n_{H_2O} = \frac{m}{M} = 37,47$ mol

- $\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{-\Delta H^\circ_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$ où $P_2 = 101\,300$ Pa, $T_1 = 301$ K, $T_2 = 373$ K, $R = 8,314$ J.(mol K)$^{-1}$

  $\Rightarrow P_1 = 3398,754$ Pa

- $P_1 V = n_{H_2O(g)} R T$ où $V = 12\,000$ L, $P_1 = 0,0335$ atm, $T = 301$ K, $R = 0,08206$

  $\Rightarrow n_{H_2O(g)} = 1,12$ mol

$m_{H_2O(g)} = n_{H_2O(g)} \cdot M_{H_2O} = 293,20$ g

$m_{H_2O(l)} = m_{H_2O} - m_{H_2O(g)} = 381,80$ g

Question 4

a) $pH_{iso} < pH_{HT}$ donc la molécule est négative

b) $[H^+] = 10^{-6,3} = 5,012 \cdot 10^{-7}$ mol/L

On peut utiliser le couple H_2CO_3 / HCO_3^- car son $K_{A1} = 4,45 \cdot 10^{-7}$ et est donc compris entre $\frac{[H^+]}{10}$ et $10\,[H^+]$

c) $\frac{C_a}{C_b} = \frac{[H^+]}{K_{A1}} = 1,126$

Question 5

a) $E = E^\circ - \frac{0,059 2}{n} \log Q$ où $n = 1$

Réd : $Ag^+_{(aq)} + 1e^- \rightleftharpoons Ag_{(s)}$

ox : $Ag_{(s)} \rightleftharpoons Ag^+_{(aq)} + 1e^-$

$E_{cathode} = 0,7402\ V$
$E_{anode} = 0,6224\ V$
$\Rightarrow E = E_c - E_a = 0,1184\ V$

b) Précipitation de $Ag^+_{(aq)}$ en $AgCl_{(s)}$

$K_s = s^2 \Rightarrow s_{Ag^+} = 1,414.10^{-4}\ mol/L$

$m_{NaCl} = \frac{m_{NaCl}}{M_{NaCl}} = 1.10^{-3}\ \frac{mol}{L}$

$E_{anode} = 0,572\ V \Rightarrow E = 0,1687\ V$

Question 6

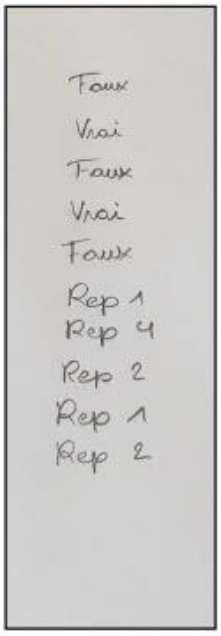
a) $K = A.\exp(-E_A/RT)$
$= 5,54.10^{-6}\ s^{-1}$

b) $K = 0,116\ s^{-1}$

c) $\ln\left(\frac{[A]_t}{[A]_0}\right) = -kt$

$\frac{[A]_t}{[A]_0} = 0,75 \Rightarrow t = 2,42\ s$

Question 7



Auditoire UD.2.120 - place N°

Année académique 2020/2021

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 4 janvier 2021

..... /20

Section et numéro de matricule :

QUESTION 1 (20 points)

Cette question validera le cas échéant les travaux personnels des étudiants en sciences physiques

La combustion complète de 100 g d'un hydrocarbure oxygéné de formule $C_xH_yO_z$ est réalisée en présence de 8,08 moles de dioxygène. La réaction produit 122 grammes d'eau ainsi que 138,7 litres de dioxyde de carbone à la température de 300 K sous une pression de 0,950 atm.
Déterminez la formule moléculaire de l'hydrocarbure, sachant que sa masse molaire vaut 74,1 g/mol.
Détaillez les étapes de votre raisonnement.

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

.....

/20

Section et numéro de matricule :

QUESTION 2 (20 points)

À basse température et dans des conditions spécifiques, le monoxyde d'azote et le dioxyde d'azote réagissent ensemble en recombinant leur électron célibataire pour former du trioxyde de diazote.

Structure de Lewis du monoxyde d'azote	
Structure de Lewis du trioxyde de diazote (+numérotez les deux atomes d'azote)	
Hybridation de l'atome d'azote n°1 + justification	Réponse : Justification :
Hybridation de l'atome d'azote n°2	Réponse :
Moment dipolaire	☐ Nul ☒ Non nul
Type d'interactions intermoléculaires possibles entre les molécules de trioxyde de diazote	

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

.....

/15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 3 (15 points)

La couche d'ozone (O_3) est située majoritairement dans la stratosphère terrestre. Les molécules d'ozone protègent la vie sur terre en absorbant la quasi-totalité des rayonnements ultra-violets de type UVC émis par le soleil. L'énergie des photons des rayonnements UVC est telle que ceux-ci peuvent engendrer des ruptures de liaisons chimiques incompatibles avec le maintien de la vie sur terre.

L'absorption d'un photon provoque la rupture d'une liaison de la molécule d'ozone selon le mécanisme suivant :

$$O_3(g) + h\nu \rightarrow O_2(g) + O(g)$$

En considérant une absorption de photons d'une longueur d'onde unique de 255 nm et que la couche d'ozone absorbe $7{,}50\ 10^{23}$ Joules par an, déterminez la masse d'ozone (en tonnes) détruite chaque année par le soleil par ce processus.

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

/15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 4 (15 points)

Déterminez l'énergie de réseau (ou enthalpie réticulaire) de l'oxyde de calcium en vous aidant des données suivantes, recueillies dans divers ouvrages de physique et de chimie.
Ces valeurs sont mentionnées dans les conditions standard à 298 K :

	Ca	O
Énergie de 1ère ionisation	6,1131 eV	1313,94 kJ/mol
Énergie de 2eme ionisation	11,8717 eV	3388,67 kJ/mol
Enthalpie de capture du premier électron	Non disponible	-142 kJ/mol
Enthalpie de capture du deuxième électron	Non disponible	+844 kJ/mol
Enthalpie de sublimation	164 kJ/mol	Non applicable

L'enthalpie de dissociation du dioxygène est de 498 kJ/mol les conditions standard à 298 K.

Détaillez votre raisonnement.

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

.....

/15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 5 (15 points)

Un élément métallique inconnu fait l'objet d'une analyse par diffraction des rayons X. L'examen détaillé du diffractogramme révèle que l'élément cristallise dans le réseau cubique centré. L'analyse est faite à l'aide d'une source d'une longueur d'onde de 0,114 nm et le pic correspondant au plan d'indices de Miller (002) apparaît à un angle de 20,2° pour le premier ordre de diffraction.

À l'aide de ces données,

a) Déterminez la distance internucléaire entre atomes premiers voisins.

b) Calculez la masse molaire (en g/mol) de cet élément connaissant sa masse volumique : 8,57 g/cm^3. Détaillez toutes les étapes de votre calcul.

c) Déduisez de ce calcul la nature chimique de cet élément

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

/15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 6 (15 points)

Soient trois configurations électroniques de l'ion X^{2-} :

C1 : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 4s^2$

C2 : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^1$

C3 : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2 4s^2 3d^2$

a) Quelle est la nature chimique de l'élément X ?

b) Classez par ordre croissant d'énergie ces trois configurations électroniques en justifiant votre raisonnement.

Interrogation de Chimie du 4 janvier 2021

Question 1

- $x = \frac{n_{CO_2}}{n_{C_xH_yO_z}}$ $\qquad n_{CO_2} = \frac{P.V}{RT} = \frac{0,95.138,7}{0,082.300} = 5,35$ mol

$n_{C_xH_yO_z} = \frac{100}{74,1} = 1,35$ mol

$x = \frac{5,35}{1,35} = 3,96 \simeq 4 \rightarrow$ 4 atomes de C

- 1 mole $C_xH_yO_z \rightarrow y/2$ moles de H_2O

$\frac{y}{2} = \frac{n_{H_2O}}{n_{C_xH_yO_z}} \Leftrightarrow y = 2.\frac{n_{H_2O}}{1,35}$ $\qquad n_{H_2O} = \frac{122}{2.1,0079+15,9994} = 6,772$ mol

$= 2.\frac{6,772}{1,35} = 10,0 \rightarrow 10$

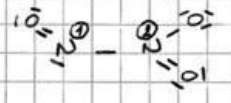
- z ? $4m_C + 10m_H + zm_O = 74,1$ g/mol

$\Leftrightarrow 4.12,0110 + 10.1,0079 + z.15,9994 = 74,1$

$\Leftrightarrow z = 0,998 \simeq 1$

$\Rightarrow C_4H_{10}O$

Question 2

- structure de Lewis du monoxyde d'azote : $|\dot{N} = O|$
- structure de Lewis du trioxyde de diazote : 
- Hybridation atome N n°1 + justification : sp^2 car 3 liens effectifs autour de cet atome
- Hybridation atome N n°2 : sp^2
- moment dipolaire : non nul
- type d'interactions intermoléculaires :
  - dipôle - dipôle
  - dipôle - dipôle induit
  - dipôle induit - dipôle induit

Question 3

$E_{photon} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626.10^{-34}.2,998.10^8}{255.10^{-9}} = 7,790.10^{-19}$ J

$n_{photons} = \frac{7,5.10^{23}}{7,790.10^{-19}} = 9,628.10^{41} = n_{O_3}$

$\frac{n_{O_3}}{N_A}.M_{O_3} = \frac{9,628.10^{41}}{6,02252.10^{23}}.(3.15,9994) = 7,67.10^{19}$ g $= 7,67.10^{13}$ tonnes

Question 4

$Ca^{2+}(g) + O^{2-}(g)$

$\Delta H^\circ_{CE_1} + \Delta H^\circ_{CE_2}$ 702 kJ mol^{-1}

$Ca^{2+}(g) + O(g)$

1/2 D_{O_2} 249 kJ mol^{-1}

$Ca^{2+}(g) + \frac{1}{2} O_2(g)$

$I_{1,Ca} + I_{2,Ca}$ 1735 kJ mol^{-1}

$Ca(g) + \frac{1}{2} O_2(g)$

ΔH° sublimation Ca 164 kJ mol^{-1}

$Ca(s) + \frac{1}{2} O_2(g)$

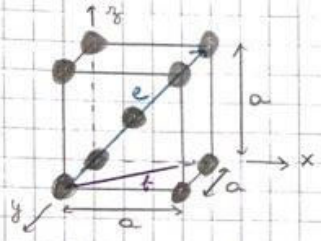
$\Delta_f H^\circ_{298K}(CaO)$ −635,09 kJ mol^{-1}

$CaO(s)$

Δ réseau H° = 3485 kJ mol^{-1}

Δ réseau H° = 702 + 249 + 1735 + 164 − (−635,09) = 3485 kJ mol^{-1}

Question 5



(002) → x : $\frac{1}{0} = \infty$, y : $\frac{1}{0} = \infty$, z : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$n\lambda = 2d \sin\theta$ → 20,2°

1 ; 0,114 nm → d002

⇔ d002 = 0,165 nm ⇒ 2d = a

⇔ a = 0,330 nm

a) $e^2 = f^2 + a^2$ $f^2 = a^2 + a^2$

$= 3a^2$

⇔ $e = \sqrt{3}\,a$

d internucléaire $= \frac{e}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,330 = 0,286$ nm

b) $V_{maille} = (0,330\ nm)^3 = 3,594 \cdot 10^{-2}\ nm^3 \xrightarrow{NA} 2,164 \cdot 10^{22}\ nm^3$

$= 21,64\ cm^3$

cubique centré ⇒ 2 atomes / maille → $V_m = \frac{21,64}{2} = 10,82\ cm^3$

$M = \rho \cdot V_m = 8,57 \cdot 10,82 = 92,7274$ g mol^{-1}

c) Nb

Question 6

a) Soufre

b) 1s ↙
2s ↙ 2p ↙
3s ↙ 3p ↙ 3d
4s ↙

18 e⁻ : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

$C_2 < C_1 < C_3$

Interrogation de chimie de juin 2021 : partie Q1

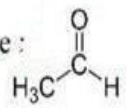
QUESTION 1 (20 points)

La plupart des autoroutes belges sont encore éclairées de nuit à l'aide d'ampoules à vapeur de sodium à basse pression. Ce type d'ampoule émet une lumière jaune-orangé caractéristique, correspondant à des photons émis à une longueur d'onde de 589 nm.
En considérant une ampoule standard libérant exclusivement ces photons à raison d'une puissance de 100 W. calculez le nombre de photons émis par une ampoule durant une nuit de 8,00 heures.

QUESTION 2 (20 points)

Les paramètres **a** et **b** de l'équation de van der Waals sont donnés ci-dessous pour l'éthanol, le propane et l'éthanal (ou acétaldéhyde). En utilisant vos connaissances, attribuez les paramètres à ces gaz.

La structure de l'éthanal est reproduite ci-contre :
Justifiez votre raisonnement.



Gaz	a / bar.L^2.mol^{-2}	B / L.mol^{-1}
1	11,37	0,08695
2	9,385	0,09044
3	12,56	0,08710

QUESTION 3 (20 points)

L'éthylène (C_2H_4) est un composé chimique utilisé massivement en milieu industriel, notamment en pétrochimie pour la fabrication de polymères. Il peut également être utilisé pour la synthèse d'éthanol par addition d'eau.

1) Écrivez l'équation de la réaction de formation de l'éthanol gazeux à partir d'éthylène gazeux et de vapeur d'eau.
2) Calculez la chaleur de réaction isobare à 25°C sous 1,00 bar. La réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Justifiez.
3) Calculez la chaleur de réaction isochore à 25°C.
4) On suppose que la chaleur libérée à pression constante par la combustion complète d'éthanol liquide est totalement transférée à 500 g de glace à -20°C contenue dans un réacteur. Quel volume d'éthanol à 25 °C faut-il brûler pour porter le contenu du réacteur à la température de 95°C ? La pression de départ dans le réacteur vaut 1,00 bar et est maintenue constante au cours de l'opération. Tous les produits de la combustion de l'éthanol sont gazeux.

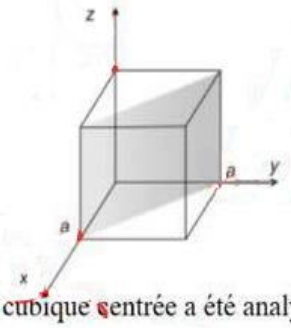
Remarque : l'enthalpie de fusion de la glace à 0°C vaut 6,07 kJ/mol, la chaleur spécifique de la glace 2,092 J/g.K. La masse volumique de l'éthanol à 25 °C vaut 0,789 g.cm^{-3}.

QUESTION 4 (20 points)

L'ion peroxynitrite est un isomère de l'ion nitrate : il possède la même formule moléculaire mais une structure différente. En sachant que le squelette de l'ion peroxynitrite est O-N-O-O, déterminez sa structure de Lewis, l'hybridation de l'atome d'azote et la charge formelle de chaque atome.

Structure de Lewis		
Hybridation de l'azote		Justification :
Charge formelle (numérotez chaque atome d'oxygène dans votre structure de Lewis)	N : O(1) : O(2) : O(3) :	

QUESTION 5 (20 points)



Un métal de structure cristalline cubique centrée a été analysé par diffraction des rayons X. La maille élémentaire et un plan sont schématisés ci-dessus.

Un rayonnement de 6,242 keV a donné, pour le plan représenté, une interférence constructive de premier ordre pour un angle incident de 26,63 degrés.

À partir de ces données et en détaillant vos démarches, déterminez :

1) les indices de Miller du plan de l'image,
2) la longueur d'onde du rayonnement incident,
3) le rayon cristallin d'un atome de cet élément.

Interrogation de chimie de juin 2021 : partie Q1

Question 1 :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626.10^{-34} \cdot 2,998.10^{8}}{589.10^{-9}} = 3,373.10^{-19}\ J$$

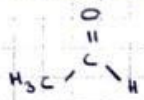
100 W = 100 J/s pendant 8 h ou 28 800 s

$\Rightarrow 28\,800 \cdot 100 = 2,88.10^{6}$ J

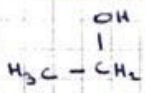
nb de photons : $\frac{2,88.10^{6}}{3,373.10^{-19}} = 8,54.10^{24}$ photons

Question 2 :

éthanal



éthanol



propane



D D → Kétone ② ← éthanal : ν, ~~LH~~

Di D → Diène ③ ← éthanal : ν, LH

Di Di → Isomère ② ← propane : ν, ~~LH~~ (ν = 50)

Question 3 :

1) $C_2H_4(g) + H_2O(g) \rightarrow C_2H_5OH(g)$

2) $Q_p = \Delta_r H^\circ_{298K} = -235,10 - (-241,82 + 52,26) = -45,54$ kJ/mol

$\Rightarrow$ exothermique

3) $\Delta H = Q_v + \Delta(PV) \Leftrightarrow Q_v = \Delta H - \Delta(PV)$

$= \Delta H - \Delta(nRT)$

$= \Delta H - RT\,\Delta n_{gaz}$

$\hookrightarrow = 1 - 2 = -1$

$\Rightarrow Q_v = -45,54 - 8,314.10^{-3} \cdot 298 \cdot (-1)$

$= -43,06$ kJ/mol

4) $C_2H_5OH(l) + 3O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + 3H_2O(g)$

$\Delta_r H^\circ_{298K} = 3.(-241,82) + 2.(-393,51) - (-277,69) = -1234,79$ kJ/mol

$Q_p = C_{p,glace} \cdot m \cdot \Delta T_1 + n\,\Delta H^\circ_{fus} + C_{p,eau} \cdot m \cdot \Delta T_2$

$= 2,092 \cdot 500 \cdot 20 + \frac{500}{18,02} \cdot 6,07.10^{3} + 75,29 \cdot \frac{500}{18,02} \cdot 95$

$= 387,9$ kJ

$n_{éthanol} = \frac{Q_p}{\Delta_r H^\circ} = 0,314$ mol

$m_{éthanol} = 0,314 \cdot 46,07 = 14,46$ g

$V = \frac{m}{\rho} = \frac{14,46}{0,789} = 18,33\ cm^3$

Question 4

- Structure de Lewis : $\overset{①}{\bar{O}} = \bar{N} - \overset{②}{\bar{O}} - \overset{③}{\bar{O}}\,]^{-1}$

- hybridation de N : sp^2 car 3 liaisons effectives autour de l'atome N.

- charge formelle :
  - N : 0
  - O(1) : 0
  - O(2) : 0
  - O(3) : −1

Question 5 :

1) $h, k, l \rightarrow h = \frac{1}{x}$; $k = \frac{1}{y}$; $l = \frac{1}{z}$ $\rightarrow \frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{\infty} = 0$

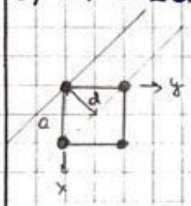
$\Rightarrow (1, 1, 0)$

2) $1\,eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J \rightarrow 6242\,eV = 1{,}000 \cdot 10^{-15}\,J$

$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{10^{-15}}$

$= 1{,}99 \cdot 10^{-10}\,m$

3) $n\lambda = 2d \sin\theta \Leftrightarrow d = \frac{1{,}99 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot \sin 26{,}63°} = 2{,}22 \cdot 10^{-10}\,m$



$a^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}\,d = 3{,}14 \cdot 10^{-10}\,m$

r : rayon cristallin

$(4r)^2 = a^2 + (\sqrt{2}\,a)^2 = 3a^2$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{3a^2}{16}$

$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}\,a}{4} = 1{,}36 \cdot 10^{-10}\,m$

EXAMEN CHIM-F101 JANVIER 2022

Partie exercices

ULB

QUESTION 1 *(40 points)* Partie exercice

Soient deux composés liquides (A et B) de formule générique $S_xO_yCl_z$. A a une masse volumique de 1,63 g/cm^3, présente une tension de vapeur de 400 mmHg à 56°C, et contient 59,6 % en masse de chlore. B a une masse volumique de 1,68 g/cm^3, présente une tension de vapeur de 477 mmHg à 56°C et contient 53% en masse de chlore.

a) Sachant que la vapeur de A a une densité de 4,107 par rapport à l'air (masse molaire 28,96 g/mol), et que A et B peuvent être considérés comme des gaz parfaits, quelle est la formule moléculaire de cette substance ?

b) Un mélange idéal à volumes égaux de A (liq) et B(liq) est placé dans une enceinte initialement vide, maintenue à 56°C. Une pression de 437 mmHg s'établit à l'équilibre.

Quelle est la fraction molaire de A dans la phase liquide ?

Quelle est la formule moléculaire de B ?

QUESTION 2 *(30 points)* Partie exercice

Les composés méthylés contenant un hétéroatome tel que O, S, N ou un halogène absorbent entre 167 et 227 nm. Certains de ces composés peuvent également servir à faire une méthylation de l'ammoniac, c'est-à-dire qu'ils peuvent réagir avec l'ammoniac afin de remplacer un ou plusieurs atomes d'hydrogène par un groupement CH_3 suivant les réactions (non équilibrées) :

$$NH_3 + CH_3X \rightarrow H_2N\text{-}CH_3$$

$$H_2N\text{-}CH_3 + CH_3X \rightarrow HN\text{-}(CH_3)_2$$

$$HN\text{-}(CH_3)_2 + CH_3X \rightarrow N\text{-}(CH_3)_3$$

$$N\text{-}(CH_3)_3 + CH_3X \rightarrow N^+\text{-}(CH_3)_4$$

a) Si une solution absorbe un rayonnement ayant une fréquence de $1{,}16.10^{15}\ s^{-1}$, quel composé méthylé contient-elle parmi ceux proposés dans le tableau suivant ?

Composé	λ_{max} (nm)	ε_{max} ($L.cm^{-1}.mol^{-1}$)
CH_3OH	167	1480
$(CH_3)_2O$	184	2520
CH_3Cl	173	200
CH_3I	258	365
$(CH_3)_2S$	229	140
CH_3NH_2	215	600
$(CH_3)_3N$	227	900

b) 250 mL de cette solution ayant une absorbance de 0,858, mesurée dans une cellule dont le chemin optique vaut 4,00 cm, sont mélangés avec 5,00 mL d'une solution d'ammoniac 25% en masse. Quelles seront les espèces présentes en solution à la fin de la réaction et leur quantité ?
(Densité ammoniac 25% = 0,892)

QUESTION 3 *(30 points)* Partie exercice

L'aniline ($C_6H_5NH_2$) se présente sous la forme d'un cycle aromatique, comme le benzène, avec une fonction amine greffée sur un des atomes de carbone. C'est un liquide dont la température d'ébullition est de 184,4°C sous 1 atm, et dont la tension de vapeur vaut 400 mmHg à 161,9°C.

a) Calculez l'enthalpie de vaporisation de l'aniline.

b) Le toluène ($C_6H_5CH_3$) présente la même structure que l'aniline, mais la fonction amine est remplacée par un groupe méthyle. Son enthalpie de vaporisation vaut 37 kJ/mol.
Dessinez les deux molécules (aniline et toluène), caractérisez les forces intermoléculaires dans les deux liquides et, sur cette base, justifiez la différence des enthalpies de vaporisation entre les deux liquides.

CHIM-f101 : examen janvier 2022

(Q1)

① a) Pour 1 mol de A :

59,6 % de Cl $\Rightarrow m_{Cl} = 118,94 \cdot 0,596 = 70,88\ g$

$\Rightarrow$ 2 Cl vu que Cl = 35, ...

$M_{tot} = 118,96\ g/mol = 2 \cdot M_{Cl} + y \cdot M_O + x \cdot M_S$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} z = 2 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{array}}$ $\rightsquigarrow$ seules solutions possibles.

b) Fraction molaire de A dans la phase liquide :

$P_{tot} = x_A^L \cdot P_A^\circ + x_B^L \cdot P_B^\circ$

$= x_A^L \cdot P_A^\circ + (1 - x_A^L) P_B^\circ$

$\Leftrightarrow 437 = x_A^L \cdot 400 + (1 - x_A^L) \cdot 477$

$\Leftrightarrow x_A^L = 0,5195$

Formule moléculaire de B

$x_A^L = \dfrac{n_A}{n_A + n_B} = \dfrac{m_A / M_A}{\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}}$

↳ mélange à volumes égaux :

100 mL de A $\rightarrow m_A = 1,63\ g/cm^3 \cdot 100\ mL = 163\ g$

100 mL de B $\rightarrow m_B = 1,68\ g/cm^3 \cdot 100\ mL = 168\ g$

$\Leftrightarrow 0,5195 = \dfrac{163/118,94}{\frac{163}{118,94} + \frac{168}{M_B}}$ $\Leftrightarrow M_B = 132,54\ g/mol$

$m_{Cl} = 53\,\% \cdot 132,54 = 70,24\ g$ $\Rightarrow$ 2 Cl

$M_{tot} = 132,54 = x \cdot M_S + y \cdot M_O + 2 \cdot M_{Cl}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} z = 2 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{array}}$

(2) a) $\nu = \frac{c}{\lambda} \iff \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\,10^8\ 10^3}{1,16.10^{15}} = 258\ nm$

=> la solution contient du CH_3I

b) $A = \varepsilon . l . c$

$\iff c_{CH_3I} = \frac{0,858}{365.4} = 0,588.10^{-3}\ mol/L$

Ammoniac 25 % d'ammoniac et 75 % d'eau

$m_{solution\ NH_3} = 5,00\ mL . 0,892\ g/mL = 4,46\ g$

$m_{NH_3} = \%_{NH_3} . m_{sol\ NH_3} = 25\% . . 4,46 = 1,115\ g$

$n_{NH_3} = \frac{m_{NH_3}}{M_{NH_3}} = \frac{1,115}{14+3} = 6,56.10^{-2}\ mol$

~~Tableau d'avancement~~

$NH_3 + CH_3X \longrightarrow H_2N-CH_3 + HI$

	NH_3	CH_3X	H_2N-CH_3	HI
	$n_{NH_3} = 6,56.10^{-2}\ mol$	$n = c\,V$ $= 0,538\,10^{-3} . 250\,10^{-3}$ $= 1,469\,10^{-4}\ mol$ => limitant	0	0
Fin réaction	$6,56.10^{-2} - 1,469.10^{-4}$ $= 0,065\ mol$	0	$1,469.10^{-4}\ mol$	$1,469.10^{-4}\ mol$

③ a) $\ln\left(\frac{P_1^\circ}{P_2^\circ}\right) = -\frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$

↳ $\Delta H_{vap} = -\ln\left(\frac{760}{400}\right) \cdot 8,314 \cdot \left(\frac{1}{457,55} - \frac{1}{435,05}\right)^{-1}$

$= 47210,8 \text{ J/mol}$

$= 47,21 \text{ kJ/mol}$

b)



toluène



aniline

DI - DI	1
DP - DP	~0
DP - DI	~0
LH	0

DI - DI	1
DP - DP	1
DP - DI	1
LH	1

↳ interactions + fortes

=> ΔH_{vap}^{+} élevée

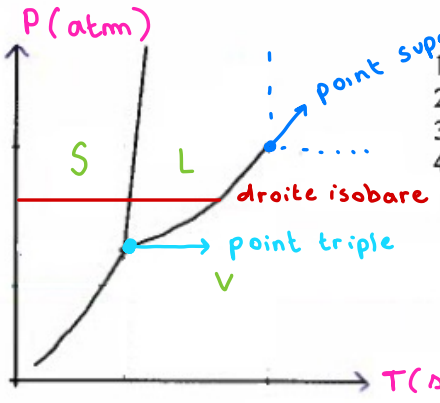
EXAMEN CHIM-F101 JANVIER 2022

Partie théorique

ULB

QUESTION 1 *(20 points)* Théorie

- Sur le diagramme des phases d'un corps pur ci-dessous, indiquez :



1) La légende pour les axes et les unités.
2) Les états de la matière dans les différentes zones du graphique.
3) La position du point triple et celle de la limite supercritique.
4) Une droite isobare traversant seulement deux états différents.
↳ pression constante

L'allure de ce graphique correspond-elle au diagramme de phase du CO_2 ou de H_2O (justifiez en 3 lignes maximum) ?

Déterminez la variance dans les conditions suivantes :

a) Au point triple $V = 1 - 3 + 2 - 0 = 0$

b) Sur la courbe d'équilibre liquide – vapeur $V = 1 - 2 + 2 - 0 = 1$

c) Dans la phase liquide uniquement $V = 1 - 1 + 2 - 0 = 2$

- Ecrivez l'équation mathématique décrivant la courbe d'équilibre solide-gaz, et explicitez chacune des grandeurs. (Soyez précis dans l'écriture des symboles.)

QUESTION 2 *(20 points)* Théorie

(a) Schématisez le diagramme d'orbitales moléculaires d'O_2 pour ses électrons de valence. Veillez à identifier les orbitales atomiques et moléculaires sur votre diagramme, indiquez l'axe d'énergie et remplissez les orbitales avec le bon nombre d'électrons.

O : $1s^2 2s^2 2p^4$ donc pour O_2 on a 12 e⁻ de valences

6 e⁻ de valences

(b) Écrivez la structure électronique correspondante.

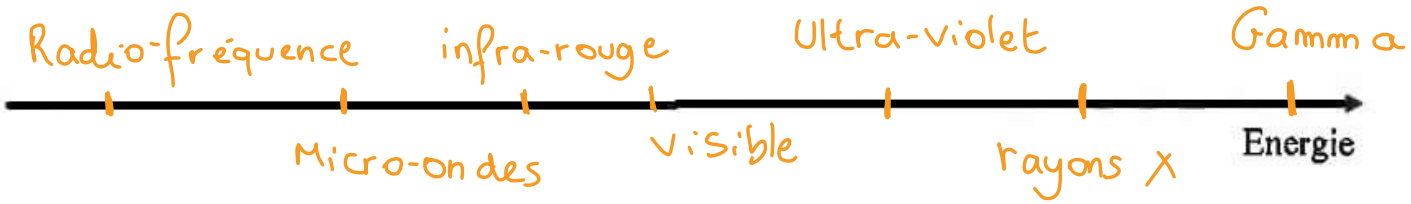
(c) Que vaut l'ordre de la liaison ? (Détaillez votre calcul.)

(d) La molécule de O_2 est-elle para ou diamagnétique ? Justifiez en 2 lignes maximum.

(e) L'ordre de liaison de O_2^+ est-il inférieur, supérieur, ou identique à celui de O_2 ? Justifiez en 2 lignes maximum.

QUESTION 3 *(15 points)* Théorie

Placez dans l'ordre d'énergie croissante, sur l'axe ci-dessous, les rayonnements Visible (Vis), Infrarouge (IR), Ultraviolet (UV), microonde (MO), X (RX), radiofréquence (RF) et gamma (γ).



Attention ⚠

On vous demande l'énergie donc $E = R \frac{c}{\lambda}$

Ainsi, + λ est grand => + l'E est petite

QUESTION 4 *(15 points)* théorie

a) Pour une solution idéale A-B, établissez mathématiquement la relation entre la fraction molaire de A en phase vapeur et la fraction molaire de A en phase liquide.

b) Si A est plus volatil que B, sa fraction molaire en phase vapeur est-elle supérieure inférieure, ou égale à celle de A en phase liquide ? (Entourez la bonne réponse et justifiez.)

QUESTION 5 (15 points) Théorie

QCM: Entourez la bonne réponse. Attention, une mauvaise réponse peut entraîner des points négatifs.

5.1. Le fer présente, à température ambiante, une maille cubique centré, représentée par l'Atomium à Bruxelles. Combien d'atomes comporte cette maille ?

- 9
- 2
- 4

5.2.

Dans l'équation de Bragg ($n\lambda = 2d\sin\theta$), utilisée en diffraction de rayons X, d représente :

- le diamètre des atomes
- la distance entre deux atomes
- la distance entre deux plans
- le diamètre du faisceau de rayons X

5.3.

Un interstice octaédrique est l'espace libre situé entre :

- 3 atomes
- 4 atomes
- 6 atomes
- 8 atomes

5.4. À molalité égale, quel sel abaisse le plus le point de congélation de l'eau ?

- chlorure de sodium
- chlorure de calcium
- nitrate d'ammonium
- chlorure de fer(III)

5.5. Le Césium se trouve dans la première colonne du tableau périodique, à la 6ième ligne. Comparé à l'azote,

- son rayon atomique est plus petit et son énergie de première ionisation est plus petite
- son rayon atomique est plus grand et son énergie de première ionisation est plus petite
- son rayon atomique est plus petit et son énergie de première ionisation est plus grande
- son rayon atomique est plus grand et son énergie de première ionisation est plus grande

QUESTION 6 *(15 points)*

Théorie

Pourquoi le CO_2 est-il un gaz à effet de serre alors qu'il ne présente pas de moment dipolaire permanent ? Justifiez en trois lignes (éventuellement avec des schémas).

EXAMEN CHIM-F101 JUIN 2022 (Q2)

Partie exercices

ULB

Ecrivez les équations (ioniques nettes s'il y a lieu) des réactions qui se produisent si on mélange les substances suivantes. Indiquez de quel type de réaction il s'agit (oxydo-réduction, acido-basiques, précipitation, substitution, autre, ...). Calculez la constante d'équilibre de chaque réaction et justifiez ses unités

① CHIMIE Q2 2022 EXERCICES p. 1

/20

ⓐ Bromure d'hydrogène (aq) et carbonate de magnésium (s) à 25°C

ⓑ Permanganate de potassium (aq) et hypochlorite de sodium (aq) en milieu basique à 25°C

ⓒ Méthane (g) et dichlore (g) pour former $CHCl_3$ et HCl (g) à 55°C, sachant que le point d'ébullition standart de $CHCl_3$ est de 61°C (négligez les éventuelles variations d'enthalpie et d'entropie avec la température).

ⓓ Quelle est l'enthalpie libre standart de vaporisation de $CHCl_3$ à 25°C ?

(2) /20

La constante d'équilibre de la réaction suivante vaut 0,090 à 25°C : $H_2O(g) + Cl_2O(g) \rightleftharpoons 2HClO(g)$. L'enthalpie libre standart de formation de Cl_2O vaut 97,9 kJ/mol à 25°C

(a) Calculez les valeurs (à 25°C) de l'enthalpie libre standart de réaction et de l'enthalpie libre standart de formation de l'hypochlorite d'hydrogène (gazeux).

(b) Calculez la composition (en fraction molaire) du mélange à l'équilibre si on part quantités $H_2O(g)$ et $Cl_2O(g)$

(c) Quel serait l'effet d'une augmentation de la pression totale sur la composition à l'équilibre ? (Justifiez votre réponse)

(d) Uniquement pour les étudiants que ont suivi le module 2 :
Si l'on dissout l'hypochlorite d'hydrogène dans une solution à pH bas (<< 5) Quelle réaction a lieu ?

Et la pile suivante :

③ CHIMIE Q2 2022 EXERCICES p. 3

/20

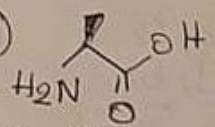
Ag(s)	AgBr(s) $[Br^-] = 0{,}1 \frac{mol}{L}$	$[XO_3^-] = 0{,}1 \frac{mol}{L}$ $[XO_4^-] = 0{,}05 \frac{mol}{L}$ pH = 4	Pt(s)

ⓐ Ecrivez les équations des réactions anodique, cathodique et globale.

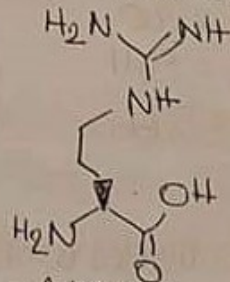
ⓑ En sachant que la force électromotrice de cette pile est de 0,822 V, déterminez par calcul la nature de l'élément X.

Des chercheurs doivent réaliser l'électrophorèse d'un échantillon comprenant un mélange de 8 acides aminés. En utilisant une solution tampon de pH = 6, ils observent la migration de 6 acides aminés vers la borne négative. En réalisant l'expérience avec une solution de pH = 3,50 2 acides aminés migrent vers la borne positive

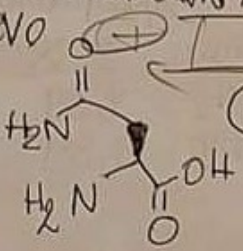
/20

(1) 

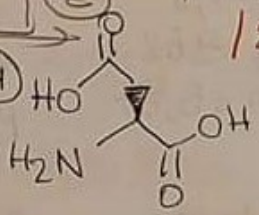
L-Alanine
$pKa_1 = 2,34$
$pKa_2 = 9,69$
$pH_{iso} = 6,01$

(2) 

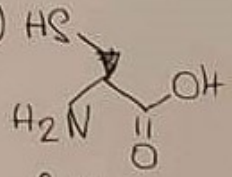
L-Arginine
$pKa_1 = 2,17$
$pKa_2 = 9,04$
$pH_{iso} = 10,8$

(3) 

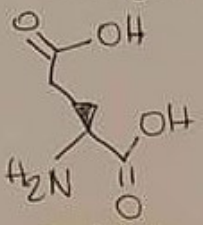
L-Asparagine
$pKa_1 = 2,02$
$pKa_2 = 8,08$
$pH_{iso} = 5,41$

(4) 

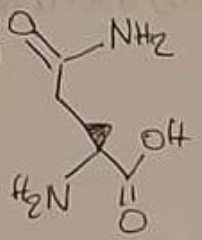
L-Acide aspartique
$pKa_1 = 2,19$
$pKa_2 = 9,60$
$pH_{iso} = 2,77$

(5) 

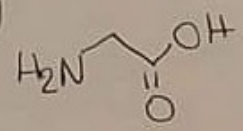
L-Cystéine
$pKa_1 = 1,96$
$pKa_2 = 8,18$
$pH_{iso} = 5,07$

(6) 

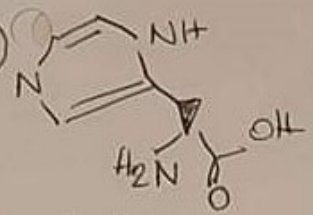
L-acide glutamique
$pKa_1 = 2,19$
$pKa_2 = 9,67$
$pH_{iso} = 3,22$

(7) 

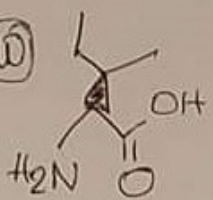
L-Glutamine
$pKa_1 = 2,17$
$pKa_2 = 9,13$
$pH_{iso} = 5,65$

(8) 

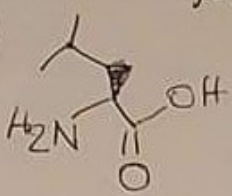
L-Glycine
$pKa_1 = 2,35$
$pKa_2 = 9,60$
$pH_{iso} = 5,97$

(9) 

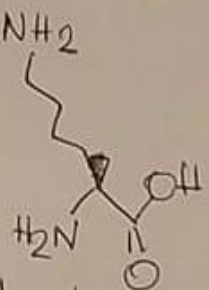
L-Histidine
$pKa_1 = 1,82$
$pKa_2 = 9,17$
$pH_{iso} = 7,59$

(10) 

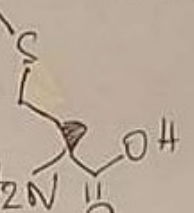
L-Isoleucine
$pKa_1 = 2,36$
$pKa_2 = 9,68$
$pH_{iso} = 6,02$

(11) 

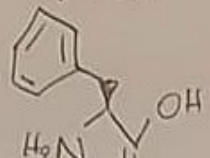
L-Leucine
$pKa_1 = 2,36$
$pKa_2 = 9,60$
$pH_{iso} = 5,98$

(12) 

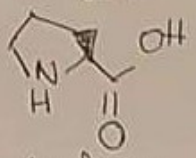
L-Lysine
$pKa_1 = 2,18$
$pKa_2 = 8,95$
$pH_{iso} = 9,74$

(13) 

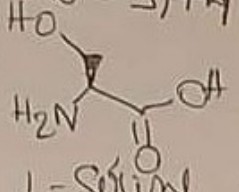
L-Méthionine
$pKa_1 = 2,28$ pH_{iso}
$pKa_2 = 9,21$ $= 5,74$

(14) 

L-Phénylalanine
$pKa_1 = 1,83$ pH_{iso}
$pKa_2 = 9,3$ $= 5,98$

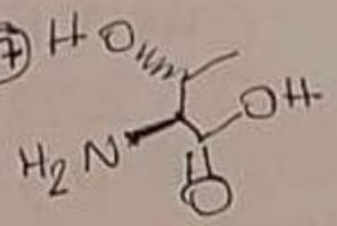
(15) 

L-Proline
$pKa_1 = 1,99$ pH_{iso}
$pKa_2 = 10,96$ $= 6,48$

(16) 

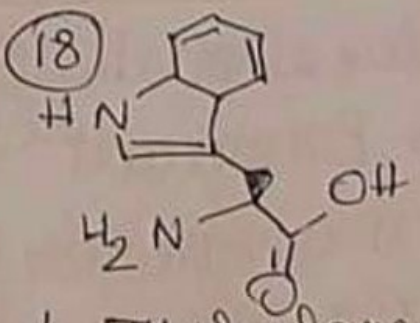
L-Sérine
$pKa_1 = 2,21$ pH_{iso}
$pKa_2 = 9,15$ $= 5,68$

(17)



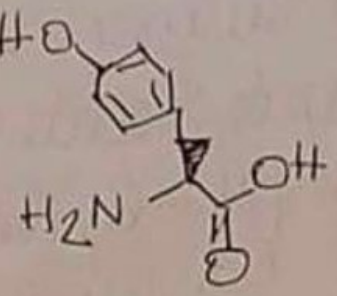
L - thréonine
$pKa_1 = 2,11$
$pKa_2 = 9,62$
$pHiso = 5,87$

(18)



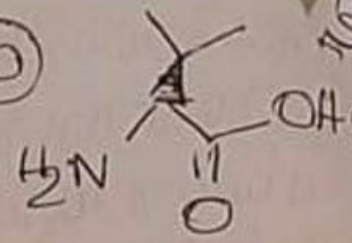
L - Tryptophane
$pKa_1 = 2,38$
$pKa_2 = 9,39$
$pHiso = 5,89$

(19)



L - Tyrosine
$pKa_1 = 2,20$
$pKa_2 = 9,11$
$pHiso = 5,66$

(20)



L - Valine
$pKa_1 = 2,32$
$pKa_2 = 9,62$
$pHiso = 5,97$

ⓐ Identifiez, sur base du tableau ci-dessus, les acides aminés contenus dans le mélange (± justification)

ⓑ Proposez sur base de vos tables de constantes, un ensemble de réactifs permettant la préparation d'une solution tampon de pH = 3,50 ainsi que les quantités (relatives) à utiliser.

La réaction $A(g) \rightarrow B(g) + 2C(g)$ a été étudiée à 25°C. En partant de A pur et en suivant la variation de la pression totale au cours du temps, les résultats suivants ont été obtenus :

CHIMIE Q2 2022

EXERCICES P. 5

(5) /20

Temps (s)	0	20	50	100	180
Pression totale (atm)	1,000	1,659	2,266	2,729	2,945

(a) A partir de ce tableau, déterminez graphiquement l'ordre de la réaction étudiée et la valeur de la constante cinétique

(b) Après combien de temps la pression totale sera-t-elle égale à 2,0 atm ?

Exercice 1 :

a) $2HBr_{(aq)} + MgCO_{3(s)} \rightleftharpoons H_2CO_{3(aq)} + MgBr_2$

acide base : $CO_3^{2-} + H_3O^+ \rightleftharpoons H_2O_{(l)} + HCO_3^-{}_{(aq)}$ $\quad \frac{1}{Ka_2} = 1,78\ 10^{10}$

Précipitation : $MgCO_{3(s)} \rightleftharpoons Mg^{2+}{}_{(aq)} + CO_3^{2-}{}_{(aq)}$ $\quad K_S = 6,82 \cdot 10^{-6}$

$$MgCO_{3(s)} + H_3O^+{}_{(aq)} \rightleftharpoons HCO_3^- + Mg^{2+} + H_2O_{(l)}$$

$$K = \frac{[HCO_3^-][Mg^{2+}]}{[H_3O^+]} = \frac{K_S}{Ka_2} = 1,2 \cdot 10^5$$

b) $ClO^-{}_{(aq)} + H_2O_{(l)} + 2e^- \rightleftharpoons Cl^-{}_{(aq)} + 2\,OH^-{}_{(aq)}$ $\quad \times 2$

$MnO_4^- + 2H_2O_{(l)} + 3e^- \rightleftharpoons MnO_{2(s)} + 4\,OH^-{}_{(aq)}$ $\quad \times 3$ $\quad \} 6e^-$

$\mathcal{E}^\circ = 0,890\ V$ $\quad \mathcal{E}^\circ = 0,595\ V$

$$2MnO_{2(s)} + \cancel{8OH^-}\ {}^{2OH^-}{}_{(aq)} + 3ClO^-{}_{(aq)} + \cancel{3H_2O} \rightleftharpoons 2MnO_4^-{}_{(aq)} + \cancel{4}H_2O_{(l)} + 3Cl^-{}_{(aq)} + \cancel{6OH^-}{}_{(aq)}$$

On a ici une Redox ! $K = \exp\left(\frac{n.F.\Delta\mathcal{E}}{R.T}\right) = \exp\left(\frac{6\ 96485.(0,890-0,595)}{8,314 \cdot 298}\right)$

$K = 8,63 \cdot 10^{29}$

c) $CH_{4(g)} + 3Cl_{2(g)} \rightleftharpoons CHCl_{3(g)} + 3HCl_{(g)}$ $\quad 6e^-$ / $3e^-$

On a encore une Redox !

$K = \exp\left(\frac{\Delta S^\circ}{R}\right) \cdot \exp\left(\frac{-\Delta H}{RT}\right) = \exp\left(\frac{-\Delta G^\circ}{RT}\right)$

$\Delta H^\circ = 3(-92,3) - 103 + 74,81 - 3.0 = -305,22\ kJ/mol$

$\Delta S^\circ = 3.186,79 + 295,7 - 186,15 + 3.222,96 = 1338,8\ J/mol.K$

$\Delta G_{328K} = -305,22.10^3 - 328,15 \cdot 1338,8 = -744547,22$

$K = \exp\left(\frac{-\Delta G^\circ}{RT}\right) = e^{277}$

d) $CHCl_{3(l)} \rightleftharpoons CHCl_{3(g)}$

On a une vaporisation !

$\Delta G^\circ = -70,4 - (-73,7) = 3,3\ kJ/mol$

Exercice 2 :

$H_2O_{(g)} + Cl_2O_{(g)} \rightleftharpoons 2HClO_{(g)}$

$\Delta_f G^\circ_{Cl_2O} = 97,9$ kJ/mol

$K = 0,09$

a) $K = \exp\left(-\frac{\Delta G^\circ}{RT}\right) \iff \ln K = -\frac{\Delta G^\circ}{RT}$

$\iff \Delta_r G^\circ = -\ln(K) \cdot RT = -\ln(0,09) \cdot 8,314 \cdot 298,15$

$= 5968,86$ J/mol

$= 6$ kJ/mol

$\Delta_r G^\circ = \sum n_p \Delta_f G^\circ(\text{prod}) - \sum n_r \Delta_f G^\circ(\text{réa})$

$\iff 6 = 2 \cdot \Delta_f G^\circ_{HClO} - \Delta_f G^\circ_{Cl_2O} - \Delta_f G^\circ_{H_2O}$

$\iff \Delta_f G^\circ_{HClO} = \frac{6 + 97,9 - 228,59}{2} = -62,36$ kJ/mol

b) * $K = \frac{(2x^2)}{(a-x)^2} \iff 0,09 = \frac{4x^2}{1-x^2-2x} \iff x = 0,13$

* $n_{tot} = a - x + a - x + 2x$

$= 2a$

$= 2 \cdot 1 = 2$ mol

* $\chi_{H_2O} = \frac{a-x}{2a} = \frac{1-x}{2} = 0,43$

$\chi_{Cl_2O} = \chi_{H_2O} = 0,43$

$\chi_{HClO} = 1 - \chi_{H_2O} - \chi_{Cl_2O} = 0,13$

c) Aucune modification car K_p ne dépend que de la T°.

d) Formation de $Cl_{2(g)}$.

Exercice 3 :

a) Anode : $(AgBr_{(s)} + e^- \rightleftharpoons Ag_{(s)} + Br^-) \times 2$ $\quad \mathcal{E}^\circ = 0,071\ V$

Cathode : $[XO_4^-]_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons [XO_3^-] + H_2O_{(l)}$ $\quad \mathcal{E}^\circ = ?$

$$[XO_4^-]_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2Ag_{(s)} \rightleftharpoons [XO_3^-]_{(aq)} + H_2O_{(l)} + 2Ag_{(s)} + 2Br^-_{(aq)}$$

b) $f.é.m = 0,822\ V$

$$E_{anode} = \mathcal{E}^\circ_{anode} - \frac{R.T}{n.F} \ln(0,1) = 0,071 - \frac{8,314 \cdot 298}{2 \cdot 96485} \cdot \ln(0,1)$$

$$E_{anode} = 0,130\ V$$

$$\Delta E = E_{cath} - E_{an}$$

$$\Rightarrow E_{cath} = \Delta E + E_{an} = 0,822 + 0,130 = 0,952\ V$$

$$\mathcal{E}^\circ_{cath} = E_{cath} + \frac{R.T}{n.F} \cdot \ln\left(\frac{0,1}{0,05 \cdot 10^{-4}}\right) = 1,197\ V$$

C'est donc le chlore

Exercice 4 :

a) Dans le premier mélange (pH = 6), les a.a qui migrent vers la borne négative, ont un $pH_{iso} > 6$ ainsi ceux-ci sont : Alanine, Arginine, Histidine, isoleucine, lysine et la proline ! Dans le deuxième mélange (pH = 3,5), les a.a migrent vers la borne positive ! Ils ont donc un $pH_{iso} < 3,5$ c'est donc l'acide aspartique et l'acide glutamique

b) pH = 3,5

On va prendre l'acide qui a le pKa le plus proche de 3,5 c'est donc l'acide malique avec $Ka_1 = 3,9 . 10^{-4}$ => pKa = 3,4

Vérifions notre choix :

$pH = 3,5 \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-3,5} = 3,162 . 10^{-4}$

$\frac{[H_3O^+]}{Ka_1} = 0,810$ ✓ $10^{-1} < \frac{cb}{ca} < 10^{1}$

Exercice 5 :

	$A_{(g)} \rightarrow$	$B_{(g)} + 2C_{(g)}$	
i	1	0	0
f	1 - x	x	2x

$P_{tot} = 1 - x + x + 2x$
$= 1 + 2x$

$x = \frac{P_{tot} - 1}{2}$

A' 0s : $x = 0$

A' 20s : $x = \frac{1,659 - 1}{2} = 0,3295$

A' 50s : $x = \frac{2,266 - 1}{2} = 0,613$

A' 100s : $x = \frac{2,729 - 1}{2} = 0,8645$

A' 180s : $x = \frac{2,945 - 1}{2} = 0,9725$

Pour savoir l'ordre, il faut trouver le graphique linéaire

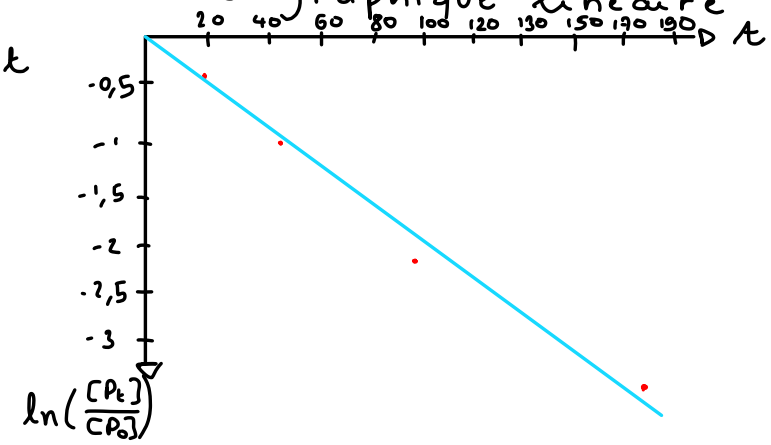
Ordre 1 : $\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right) = -ak.t$

A' 20s : $\ln\left(\frac{1 - 0,3295}{1}\right) = -0,400$

A' 50s : $\ln\left(\frac{1 - 0,613}{1}\right) = -0,95$

A' 100s : $\ln\left(\frac{1 - 0,8645}{1}\right) = -1,99$

A' 180s : $\ln\left(\frac{1 - 0,9725}{1}\right) = -3,59$



La courbe est linéaire donc l'ordre est 1 !

k = ?

$\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right) = -ak.t$

$\Leftrightarrow k = \frac{-\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right)}{t} = 1,9.10^{-2}\ s^{-1}$

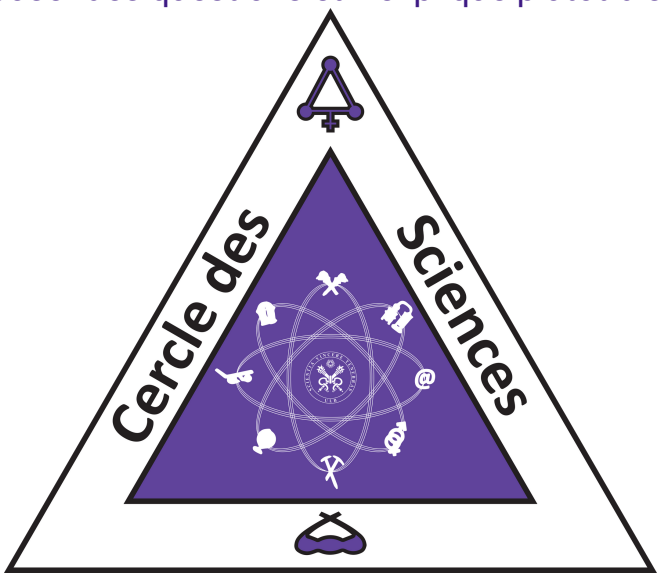
b) Pression totale = 2 atm

$t = \frac{-\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right)}{k} = \frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1,9.10^{-2}} = 34$ secondes

Math-f112 + f115

Math-F112 est lui aussi un cours donné à plusieurs bacheliers en sciences!
Encore une fois, un examen facultatif en novembre vous sera proposé.
Il comptera pour 25% de votre Q1 (c'est bcp) donc passez le ;) mais si vous avez vrm un problème de temps et que vous devez ABSOLUMENT choisir entre les 3 exams de novembre, je vous conseille de passer en priorité physique et chimie <3
Le Q1 est constitué de rappels de la secondaire donc si vous avez des difficultés en maths je vous conseille de vrmnt taffer le Q1 parce que le Q2 sera plus compliqué.
Ce n'est pas spécialement un cours très dur mais ne le sous-estimez pas pour autant car c'est quand même 10 crédits!
À l'examen vous aurez des questions d'exercices mais aussi des questions de théorie pour lesquelles il faudra donc apprendre un peu de par cœur.
Les questions de théorie valent quand même un bonne partie de l'examen (~25%) donc encore une fois si vous avez des difficultés, taffez bien ces questions :)
En Mathf-112 vous aurez des cours de théorie (avec Julie), des Ex-cath 2x par semaine ET des séminaires 1x par semaine.
Dans mon année certain.e.s sont allé.e.s à tous les cours, d'autres sont juste allé.e.s aux Ex-cath/séminaires. À vous de voir ce qui vous convient le mieux ;)

Mathf-115 est un cours donné au Q2 par Joel qui est super gentil :)
Il est divisé en 3 parties: « analyse vectorielle, suite-série et algèbre linéaire »
C'était un nouveau cours en 2021-2022 donc vous n'aurez pas beaucoup d'anciens examens alors essayez de tous les faire comme entrainement comme ça vous aurez une idée de ce qu'il attend! De plus, si vous avez la chance qu'il vous donne un examen blanc FAITES LE car il ressemblera très fort à votre exam.
L'examen est divisé en 2 parties, la première est plutôt simple si vous avez fait les exercices donnés en Ex-cath car ça y ressemble BEAUCOUP.
Dans la deuxième partie vous aurez 3 grosses questions et vous devrez en choisir 2.
Elles sont plus compliquées mais elles sont divisées en sous parties pour vous guider et donc même si vous n'arrivez pas à y répondre en entier vous aurez déjà quelques points.
En gros encore une fois même si vous avez des difficultés en maths, y a toujours moyen de moyenner ;)
Bref c'est pas un cours insurmontable et personnellement j'ai vrm apprécié les cours avec Joël car on peut poser des questions et il explique plutôt bien.



Correction

Faculté des Sciences

Examen de Mathématiques — Math-F-112

(Titulaires : D. Leemans, C. Azizieh, S. Rexhep)

3 Novembre 2017

Sections: BIOL1, CHIM1, GEOG1, GEOL1, INFO1, IRBI1, SCIE1

Consignes :

- Indiquez votre nom, prénom et matricule aux endroits indiqués et sur chaque feuille que vous rendez.
- Répondez aux questions à choix multiple en noircissant la case appropriée.

Votre NOM et Prénom :

Votre section :

Votre matricule, à noircir :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Les questions qui suivent sont à choix multiple, répondez-y en cochant la case appropriée.

Question 1 Parmi les fonctions suivantes quelle est celle qui n'est ni paire ni impaire.

- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 1$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin(x)$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 + x$
- ■ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2 - x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 2$

Question 2 Le produit $(1, 1, 5) \times (2, 1, 0)$ vaut

- ☐ $(2, 10, -1)$
- ■ $(-5, 10, -1)$
- ☐ $(4, 3, 2)$
- ☐ $(4, 2, 7)$
- ☐ $(1, 5, 10)$
- ☐ $(3, 3, -3)$

Question 3 L'ensemble des solutions de l'équation suivante est ...

$$\sin^2(x) + 2\sin(x) + 1 = 0$$

- ☐ $\{\pi/4 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ■ $\{3\pi/2 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/2 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/4 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Question 4 Le point symétrique au point $(1, 0)$ par rapport à la droite d'equation $y = 2-x$ est le point de coordonnées

- ■ $(2, 1)$
- ☐ $(3, -1)$
- ☐ $(3, -4)$
- ☐ $(-1, 1)$
- ☐ $(0, 0)$
- ☐ $(-2, 1)$

Question 5 Si x est tel que $log_x 7 = 1/3$, x vaut

- ■ 343
- ☐ $1/343$
- ☐ 49
- ☐ $1/7$
- ☐ 7
- ☐ $1/49$

Question 6 Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les lettres XYZTUV sans utiliser deux fois la même lettre ?

- ■ 360
- ☐ 240
- ☐ 180
- ☐ 45
- ☐ 720
- ☐ 28

Correction

Question 7 Lesquelles des argumentations suivantes sont correctes ?

- ☐ Quand il pleut je prend mon parapluie. J'ai pris mon parapluie aujourd'hui. Donc il pleut aujourd'hui.
- ■ Tous les rubis sont rouges, et toutes les émeraudes vertes. Une pierre précieuse bleue n'est donc ni un rubis, ni une émeraude.
- ☐ Tout étudiant étudie durant le week-end. Jacques travaille le vendredi. Jacques n'est donc pas étudiant.
- ☐ Aucun étudiant ne possède une voiture. Donc aucun conducteur n'est étudiant.
- ☐ Tout étudiant a le droit de vote. Hélène n'a pas voté, Elle n'est donc pas une étudiante.

Question 8 L'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $a = (1, 4, 2)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $b = (1, 2, -1)$ et $c = (1, 1, 1)$ est

- ☐ $x + 2y + z = 16$
- ☐ $z = 5$
- ☐ $y - 2z = 6$
- ☐ $x + y + z = 12$
- ☐ $x + z = 8$
- ■ $y = 2z$

Question 9 Le sinus de l'angle $-7\pi/6$ vaut

- ☐ $\sqrt{3}/2$
- ☐ $-\sqrt{3}/2$
- ☐ $-1/2$
- ☐ $-\sqrt{2}/2$
- ■ $1/2$
- ☐ $\sqrt{2}/2$

Question 10 Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la droite de R^3 d'équation

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $x + y + z = 0$.

- ■ -5
- ☐ -2
- ☐ 0
- ☐ 5
- ☐ -4
- ☐ 3

Math-F-112 – Mathématiques

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.
Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.
Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.
Répondez à chaque question sur la page correspondante.
Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Prouver l'égalité

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Testons d'abord cette égalité pour $n = 0$. Elle donne $0 = 0$.

Supposons ensuite que l'égalité est vérifiée pour n et montrons qu'alors elle est aussi vérifiée pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \textstyle\sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= (n+1)^2 + \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{6(n+1)+n(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{6(n+1)+2n^2+n}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{2n^2+7n+6}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{(2n+3)(n+2)}{6} \\
&= \tfrac{(2(n+1)+1)(n+1)((n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

2. (10 points) Démontrer que la droite d'équation $2x + y + 3 = 0$ coupe le segment limité par les points $a = (-5, 1)$ et $b = (3, 7)$.

   Le point de coordonnées $(-5, 7)$ est sur la droite. Il est au dessus du point a. Le point de coordonnées $(3, -9)$ est aussi sur la droite. Il est en-dessous de b. La droite doit donc nécessairement couper le segment limité par les points a et b.

3. (10 points) Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lceil x \rceil - \sqrt{x}.$$

(a) Déterminer en quels points de $\mathbb{R}$ cette fonction est continue.

(b) Etudier la croissance de cette fonction.

(a) Il faut d'abord noter que pour que cette fonction soit définie, il faut que x soit un nombre positif à cause de la racine carrée. Pour tout réel non entier, la fonction f est une différence de fonctions continues, et donc elle est continue. Pour les entiers positifs, la fonction est clairement discontinue car la limite à gauche et la limite à droite diffèrent de 1. La réponse est donc l'ensemble des réels positifs non entiers.

(b) La dérivée ne peut être calculée que pour les points où la fonction est continue. En ces points, le plafond est une constante et donc sa dérivée vaut 0. La dérivée de f est donc $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et la fonction est donc toujours décroissante sur les réels non entiers.

4. (10 points) Calculer en utilisant le développement de Taylor de $y = \sin x$ au voisinage de $x = \pi/6$ une valeur approchée de $\sin 32^o$ (se limiter au terme du second degré).

   L'angle $\pi/6$ est un angle de 30 degrés. $32^o - 30^o = 2^o$. Comme π correspond à 180°, 2° correspond à $\pi/90$.

   Le développement de Taylor du 2ème degré de $\sin x$ au voisinage de $\pi/6$ vaut donc

$$\sin(\pi/6) + \cos(\pi/6)(\pi/90) - \sin(\pi/6)(\pi/90)^2/2$$

5. (10 points) Calculer

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx.$$

On pose $t = 1 + x^2$ et donc $dt = 2xdx$. On remplace dans l'intégrale en recalculant les bornes. Quand $x = 0$, $t = 1$ et quand $x = \sqrt{e-1}$, $t = 1 + e - 1 = e$. L'intégrale devient

$$\int_1^e \frac{2}{t} dt = [2 \ln |t|]_1^e = 2 \ln e - 2 \ln 1 = 2.$$

CORRECTION

Faculté des Sciences

Examen de Mathématiques — Math-F-112

(Titulaires : B. Premoselli, J. de Saedeleer, C. Lecoutre)

31 Octobre 2018

Sections: BIOL1, CHIM1, GEOG1, GEOL1, INFO1, IRBI1, SCIE1

Consignes :

- Indiquez votre nom, prénom et matricule aux endroits indiqués et sur chaque feuille que vous rendez.
- Répondez aux questions à choix multiple en noircissant la case appropriée.

Votre NOM et Prénom :

Votre section :

Votre matricule, à noircir :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Les questions qui suivent sont à choix multiple, répondez-y en cochant la case appropriée.

Question 1 Que vaut $\sin(\frac{\pi}{6} + x)$?

- ■ $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$
- ☐ $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
- ☐ $\cos x$
- ☐ $-\sin x$
- ☐ $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$
- ☐ $\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

Question 2 Parmi les fonctions suivantes, quelle est celle qui n'est pas surjective ?

- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$
- ☐ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin x$
- ☐ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$
- ☐ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt[3]{x}$
- ■ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Question 3 Dans le plan, le point symétrique au point $(1, 0)$ par rapport à la droite d'équation $y = 3 - x$ est le point de coordonnées

- ■ $(3, 2)$
- ☐ $(3, -4)$
- ☐ $(-1, 1)$
- ☐ $(0, 0)$
- ☐ $(-3, 2)$
- ☐ $(2, 1)$

Question 4 Le produit vectoriel $(-2, 1, 0) \times (3, 1, 4)$ vaut

- ☐ $(3, 3, -3)$
- ☐ $(2, 10, -1)$
- ☐ $(4, 2, 7)$
- ☐ $(4, 3, 2)$
- ■ $(4, 8, -5)$
- ☐ $(1, 5, 10)$

Question 5 L'équation $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ est celle d'un cercle

- ■ de centre $(3, 4)$ et de rayon 5
- ☐ de centre $(4, 5)$ et de rayon 3
- ☐ de centre $(1, 2)$ et de rayon 7
- ☐ de centre $(0, 0)$ et de rayon 5
- ☐ de centre $(0, 0)$ et de rayon 2
- ☐ de centre $(4, 3)$ et de rayon 5

Question 6 Parmi les fonctions suivantes quelle est celle qui n'est ni paire ni impaire ?

- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 2$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \cos(x)$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 + 3x$
- ■ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 - x$
- ☐ $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \to 1/x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 1$

CORRECTION

Question 7 Laquelle des argumentations suivantes est correcte ?

- ☐ Quand il pleut je prends mon parapluie. J'ai pris mon parapluie aujourd'hui. Donc il pleut aujourd'hui.
- ☐ Tout homme est mortel. Socrate est mortel. Donc Socrate est un homme.
- ☐ Tout étudiant étudie durant le week-end. Jacques travaille le vendredi. Jacques n'est donc pas étudiant.
- ☐ Tous les rubis sont rouges, et toutes les émeraudes vertes. Une pierre précieuse verte ou rouge est donc un rubis ou une émeraude.
- ■ Toute étudiante a le droit de vote. Hélène est étudiante. Elle a donc le droit de vote.

Question 8 Combien de tas de 5 lettres peut-on former avec les lettres XYZTUVW sans utiliser deux fois la même lettre ?

- ☐ 240
- ■ 21
- ☐ 360
- ☐ 15
- ☐ 2520
- ☐ 720

Question 9 Le cosinus de l'angle $-7\pi/6$ vaut

- ☐ $1/\sqrt{3}$
- ☐ $-1/2$
- ☐ $1/2$
- ■ $-1/\sqrt{3}$
- ☐ $-\sqrt{3}/2$
- ☐ $\sqrt{3}/2$

Question 10 Quelle est l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $a = (1, 1, 1)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $b = (1, 2, -1)$ et $c = (-1, -1, 3)$?

- ☐ $z = 5$
- ☐ $x + 2y + z = 16$
- ☐ $x + z = 8$
- ■ $-2x - 3y + 4z + 1 = 0$
- ☐ $x + y + z = 12$
- ☐ $y - 2z = 6$

Module S – Examen blanc 2018

1) On considère le champ de vecteurs f défini sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (z^2, xyz, y)$$

   a) Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ en un point (x, y, z)quelconque de $\mathbb{R}^3$;
   b) Calculer le flux de ce champ de vecteur à travers la sphère de rayon 1 centrée en l'origine (0,0,0) , orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_S f.dS$$

   (Aide : utiliser le théorème de la divergence).

2) On considère la suite (x_n) définie par :

$$x_n = \frac{\ln(n^n)}{n!} \; pour \; n \geq 1$$

   a) Calculer la limite de cette suite : $\lim_{n\to\infty} x_n$
   b) On considère maintenant la série correspondante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

   Cette série est-elle convergente ? convergente absolument ?

3) On considère l'application linéaire suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (aussi appelé opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^3$) :

$$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (3x, 2y + z, x - z)$$

   a) Quelle est la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
   b) Les vecteurs (3,0,1), (0,2,0) et (0,1,-1) sont-ils linéairement indépendants ?
   c) Chercher les valeurs propres de cet opérateur linéaire, et chercher les vecteurs propres (sous-espaces propres) associés.
   d) Le noyau de cette application est-il réduit à {(0,0,0)} ? L est-elle injective ? Surjective ?

Note : ceci n'est pas un examen, et ne fera en particulier pas l'objet d'une correction individuelle, et aucune note n'y sera attribuée. Il constitue uniquement un exemple de questions du niveau de celles de l'examen portant sur la matière vue dans le module S du cours MATHF112/MATHF1112.

Examen blanc 2018

① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (z^2, xyz, y)$.

a) $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

$= \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial xyz}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z} = 0 + xz + 0 = xz$

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & xyz & y \end{vmatrix} = (1-xy)\vec{e_1} + 2z\vec{e_2} + yz\vec{e_3}$$

↳ c'est le champ de vecteurs :

$\operatorname{rot} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (1-xy, 2z, yz)$.

b) flux à travers sphère rayon 1 centrée en $(0,0,0)$:

$$\oint\!\!\oint_S f \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} f \, dx\,dy\,dz$$ (Thm de la divergence)

S : surface fermée orientée vers l'extérieur

V : volume délimité par la sphère = boule rayon 1 centrée en $(0,0,0)$

↳ $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\} = V$

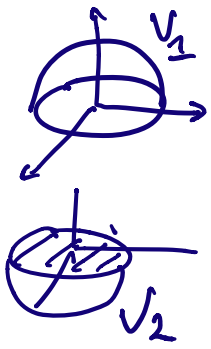
$$\iiint_V xz \, dx\,dy\,dz = ?$$

- En fait, on pouvait directement calculer cette intégrale en utilisant le fait que $z \mapsto z$ est impaire, et que de ce fait :

$$\iiint_V xz \, dx\,dy\,dz = \iiint_{V_1} xz \, dx\,dy\,dz + \iiint_{V_2} xz \, dx\,dy\,dz$$

où $V_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ et } z \geq 0\}$

$V_2 = \{ \ldots \ldots \text{ et } z \leq 0\}$



et en utilisant le chgt de variable :

$$\begin{cases} u = x \\ v = y \\ w = -z \end{cases}$$

constater que $\iiint_{V_2} xz \, dx\,dy\,dz = -\iiint_{V_1} xz \, dx\,dy\,dz$,

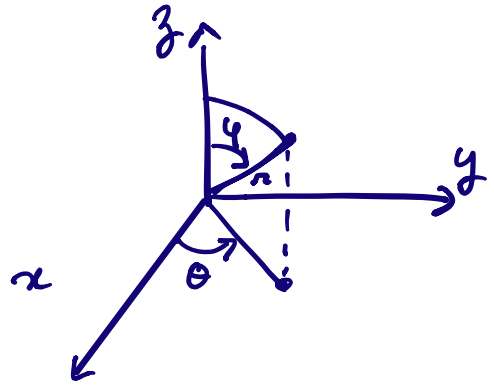
ce qui implique que l'intégrale est nulle.

- Si on ne voit pas cela tout de suite, on peut aussi explicitement calculer l'intégrale en passant aux coord. sphériques :

↳ car le domaine est une boule

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$(r,\theta,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$



le jacobien de ce chgt de variable s'obtient comme le dét. de la matrice jacobienne associée :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$= \dots = r^2\sin\varphi$

(! bon à savoir, de même que les jacobiens associés aux coord. polaires (r) et cylindriques (r))

Formule de chgt de variable :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} r^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,|r^2\sin\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

où $V' = [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

↳ rectangle de dim 3

Par le thm de Fubini, cette dernière intégrale vaut :

$$\left(\int_0^1 r^4 \, dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \,|\sin\varphi|\cos\varphi \, d\varphi\right) \quad (*)$$

(l'expression est toute simple car on intègre sur un rectangle en 3D le produit de 3 fonctions ne faisant intervenir qu'une seule variable à chaque fois : r^4, $\cos\theta$ et $\sin\varphi\,|\sin\varphi|\cos\varphi$).

Or, $\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$ (c'est $\underbrace{\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}}_{=0-0=0}$)

Donc cette intégrale vaut 0.

(*) Si vous ne voyez pas cela, appliquez bêtement Fubini comme suit :

$$\int_0^1 dr \left(\int_0^{\pi} d\varphi \left(\int_0^{2\pi} r^4 \cos\theta \, \sin\varphi\,|\sin\varphi|\cos\varphi \, d\theta\right)\right)$$

$$= \int_0^1 dr\, r^4 \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\,|\sin\varphi|\cos\varphi \, d\varphi \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta}_{=0}\right)\right)$$

$= 0$.

(2) a) $x_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$, $n \geq 1$.

Que vaut $\lim x_n$? (note : pour les suites, comme la limite est toujours pour $n \to \infty$, on évite souvent "$\lim x_n$" au lieu de "$\lim_{n\to\infty} x_n$")

Soit $n \geq 1$ naturel.

$$0 \leq |x_n| = x_n = \frac{n \ln n}{n!} = \frac{\ln n}{(n-1)!} \leq \frac{\ln n}{n-1}$$

car $(n-1)! \geq n-1$ $\forall n \geq 1$

(démontrée générale, $n! \geq n$ $\forall n \geq 1$:

si $n \geq 1$: $n! = n \underbrace{(n-1)!}_{\geq 1} \geq n$).

Quand on voit cela, et quand on sait que $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ beaucoup + lentement que la fonction $n-1$, on "sent" que $\frac{\ln n}{n-1}$ va tendre vers 0 (car $\ln n$ est beaucoup + petit que $n-1$ quand n est "grand").

Montrons-le formellement :

$\lim \dfrac{\ln n}{n-1} = ?$ c'est un cas $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On va appliquer la règle de l'Hospital à la lim de la fonction réelle $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} : \text{Cas } \frac{1}{+\infty},$$

cette lim vaut donc 0 par les règles de calcul sur les limites.

Donc la suite $\frac{\ln n}{n-1}$ tend aussi vers 0.

Donc par le test de comparaison ("thm des sandwich") :

$$0 \leq \lim |x_n| = \lim x_n \leq \lim \frac{\ln n}{n-1} = 0,$$

donc $\lim x_n = 0$.

b) Convergence de $\sum \frac{\ln(n^n)}{n!}$: (série à termes positifs)

On essaie le critère du quotient (souvent ça marche bien dès qu'il y a des factorielles) :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln((n+1)^{n+1})}{(n+1)!} \frac{n!}{\ln(n^n)}$$

$$= \lim \frac{n+1}{n} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{n!}{(n+1)n!}$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{1}{n+1}$$

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \lim \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{cas } \frac{1}{\infty} \to 0} = 1 + 0 = 1$

- $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ (cas $\frac{1}{\infty}$ à nouveau)

- $\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = ?$ cas $\frac{\infty}{\infty} \to$ l'Hospital

appliqué à la fonction d'une variable réelle

$$x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{\frac{x}{x+1}}^{\text{cas } \frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim \frac{1}{1} = 1.$$

↓ encore l'Hospital

La lim d'un produit étant égale au produit des limites (lorsque ces différents limites existent dans $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \lim \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Par le critère du quotient, notre série converge donc absolument (ainsi que simplement).

↓

ici la conv. simple revient à la conv. absolue car c'est une série à termes ≥ 0).

(3) On considère l'application linéaire suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \longmapsto (3x, 2y+z, x-z).$$

a) Il s'agit des composants des images de $\overline{e_1} = (1,0,0)$, $\overline{e_2} = (0,1,0)$ et $\overline{e_3} = (0,0,1)$ écrits en colonne :

$$L(\overline{e_1}) = L(1,0,0) = (3,0,1)$$
$$L(\overline{e_2}) = (0,2,0)$$
$$L(\overline{e_3}) = (0,1,-1)$$

la matrice s'écrit donc : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Vecteurs linéairement indépendants ?

Une manière de voir cela est de repartir de la déf de vecteurs lin. indépendants :

$$\lambda(3,0,1) + \mu(0,2,0) + \gamma(0,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda = 0 \\ 2\mu + \gamma = 0 \\ \lambda - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ oui, les vecteurs sont bien lin^t indépendants car la seule sol. est $\lambda = \mu = \gamma = 0$.

On aurait pu aussi calculer le déterminant de la matrice constituée par ces vecteurs et constater que celui-ci est non nul.

c) Vecteurs propres :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -1$$

$\Rightarrow$ 3 valeurs propres : 3, 2 et -1.

- Sous-espace propre associé à 3 : V_3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{3x = 3x} \\ 2y + z = 3y \\ x - z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ et } x = 4z\}$$

c'est une droite (intersection de 2 plans).
Il est engendré par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls (par ex. par $(4,1,1)$).

- Sous-espace propre associé à la V.P. 2 (V_2) :

$$\begin{cases} 3x = 2x \\ 2y + z = 2y \\ x - z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cancel{z = 2y} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } z = 0\}$$

Autrement, c'est l'intersection de 2 plans, c'est une droite.
Il est engendré par exemple par le vecteur $(0,1,0)$. $(V_2 = \langle (0,1,0) \rangle)$

- Sous-espace propre associé à la V.P. -1 (V_{-1}).

$$\begin{cases} 3x = -x \\ 2y + z = -y \\ x - z = -z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 0 \\ \cancel{x = 0} \end{cases}$$

$\Rightarrow V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0 \text{ et } 3y+z=0\} = \langle (0,1,-3) \rangle$

Il est engendré par le vecteur $(0,1,-3)$.

d) le noyau de L est réduit à $(0,0,0)$ car on a vu que on était pas valeur propre.

Donc L est injective. Comme $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

la dim de l'espace vectoriel de départ ($\mathbb{R}^3$) est 3,

et par le Thm du rang

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathbb{R}^3) & = & \dim \ker L & + & \dim \operatorname{Im} L \\ \| & & \| & & \\ 3 & & 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} L = 3$.

Donc $\operatorname{Im} L$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dim 3. C'est donc $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Donc L surjective.

(si W sous-espace de V avec $\dim W = \dim V (< \infty)$ alors $W = V$).

(L est en fait une bijection).

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES

Modules T et S du Q2

BIOL1 – CHIM1 – IRBI1 – SCIE1

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.
Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.
Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.
Répondez à chaque question sur la page correspondante.
Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Soit l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x)\sin(x)\cos(x) = e^{\sin^2(x)}.$$

   (a) Trouver une solution particulière de cette équation.

   (b) Résoudre l'équation homogène associée.

   (c) Donner la solution générale de l'équation.

   (d) Résoudre le problème de Cauchy pour $y(1) = 0$.

2. (10 points) Intégrer la fonction $f(x, y) = y + xy$ sur le domaine $D = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq r_0^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ où r_0 est un nombre réel strictement positif.

3. (10 points) On considère le champ de vecteurs f défini sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (z + y, y + x, x + z)$$

(a) Calculer la divergence et le rotationel de ce champ en un point (x, y, z) quelconque de $\mathbb{R}^3$

(b) Calculer le flux de ce champ de vecteurs à travers la sphère S de rayon 1 centrée en l'origine $(0, 0, 0)$ et orientée vers l'extérieur:

$$\oiint_S f.dS$$

(Aide: utiliser le théorème de la divergence)

4. (10 points) On considère la suite (x_n) définie par:

$$x_n = \frac{n+1}{n^2\ 3^n} \ \textit{pour}\ n \geq 1$$

   (a) Calculer la limite de cette suite: $\lim_{n\to+\infty} x_n$

   (b) On considère maintenant la série correspondante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

   Cette série est-elle convergente? Est-elle convergente absolument?

5. (10 points) On considère l'opérateur linéaire suivant sur $\mathbb{R}^3$:

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x, y + z, -x + 3z)$$

   (a) Ecrire la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;

   (b) Chercher les valeurs propres de L, et chercher les sous-espaces propres associés;

   (c) Montrer que les vecteurs $(2, 0, -1), (0, 1, 0)$ et $(0, 1, 3)$ sont linéairement indépendants.

Juin 2018

Q1 ⚠ erreur dans l'énoncé.

b) $y'(x) = y(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x)$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2\sin(x)\cos(x) \iff \int \frac{dy}{y_H} = \int 2\sin(x)\cos(x)\,dx$$

$$\iff \ln y_H = \sin^2(x) + C \iff y_H = K \cdot e^{\sin^2 x}$$

a) $y_P = k(x) \cdot e^{\sin^2 x}$

$$\to k' e^{\sin^2 x} + k(x) 2\sin x\cos x \cdot e^{\sin^2 x} - k(x) e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x\cos x = e^{\sin^2 x}$$

$$\to k' = e^{\sin^2 x} \cdot e^{-\sin^2 x} = e^{\sin^2 x - \sin^2 x} = 1$$

$$\to k(x) = \int 1\,dx = x$$

$$y_P = x \cdot e^{\sin^2 x}$$

c) $y = y_H + y_P = K \cdot e^{\sin^2(x)} + x e^{\sin^2 x}$

d) $y(\pi) = 0$

$$y = K \cdot e^{\sin^2(\pi)} + \pi \cdot e^{\sin^2(\pi)} = 0$$

$$K = -\pi$$

Q2 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $r \in [0; r_0]$ $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^{r_0}\int_0^{\pi/2} |r\sin\theta + r\cos\theta \; r\sin\theta| \, r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} + r^3\left[\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2\left[-0-(-1)\right] + r^3\left[\tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2\right] dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 + \frac{r^3}{2}\, dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 dr + \frac{1}{2}\int_0^{r_0} r^3 dr$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{r_0} + \frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{r_0}$$

$$= \frac{r_0^3}{3} + \frac{r_0^4}{8}$$

Juin 2018

(3)

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 2$

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} z+y \\ y+x \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$ $\quad \theta \in [0;\pi]$ $\quad \varphi \in [0;2\pi]$

$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dx\,dy\,dz$ $\rightarrow r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi\, dr$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$\int_0^1 2r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot (-(-1)-(-1)) = \frac{8\pi}{3}$$

Correction examen juin 2018- questions 4 et 5 seconde partie de l 'examen.

(4) (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}$

↓ lim d'un produit = produit des limites si chacune des lim existe

- $\lim \frac{n+1}{n^2} = ?$ Cas $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}$: Cas $\frac{1}{\infty}$. Par la règle de calcul vues au cours, cette limite est nulle.

↓ règle de l'Hospital

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$. Donc pas la 1ère règle de calcul (Cas $\frac{1}{\infty}$),

$\lim \frac{1}{3^n} = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2 3^n} = \lim \frac{n+1}{n^2} \cdot \lim \frac{1}{3^n} = 0.0 = 0$.

(b) La série $\sum \frac{n+1}{n^2} \frac{1}{3^n}$ est une série à termes positifs. La convergence est donc équivalente à la conv. (simple) absolue.

Par ailleurs, $0 \leq \frac{n+1}{n^2} \leq 1$ dès que $n^2 - n - 1 \geq 0$ ce qui est le cas $\forall n \geq 2$.

Donc pour $n \geq 2$, on a $0 \leq \frac{n+1}{n^2} \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$.

Or $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (absolument) car c'est la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ (plus petite que 1) et on a vu que $\sum z^n$ converge absolument $\forall z$ tel que $|z| < 1$. C'est bien le cas ici ($z = \frac{1}{3}$), donc $\sum \frac{1}{3^n}$ conv. absolt.

Par le critère de comparaison, $\sum \frac{n+1}{n^2} \frac{1}{3^n}$ converge absolument, et donc en particulier aussi simplement.

(5) Opérateur linéaire :

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto (2x, y+z, -x+3z)$

(a) Matrice de L : il suffit de chercher l'image de la base canonique par L et de mettre les coord. en colonne.

$L(1,0,0) = (2, 0, -1)$

$L(0,1,0) = (0, 1, 0)$

$L(0,0,1) = (0, 1, 3)$

→ matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Valeurs propres de L :

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\iff \lambda = 2$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$.

Sous espace propre V_1 associé à $\lambda = 1$:

On cherche (x,y,z) tel que $L(x,y,z) = (x,y,z)$:

$$\iff \begin{cases} 2x = x \\ y+z = y \\ -x+3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ (0=0) \end{cases}$$

C'est donc le sous-espace :

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}.$$ C'est en fait l'axe des y.

Sous-espace V_2 :

$$L(x,y,z) = 2(x,y,z) \iff \begin{cases} (2x = 2x) \\ y+z = 2y \\ -x+3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ z = x \end{cases}$$

$\Rightarrow V_2 = \{(x,y,z) \mid x = y = x\}$. (C'est une bissectrice)

Sous-espace V_3 :

$$L(x,y,z) = 3(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3x \\ y+z = 3y \\ -x+3z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y = z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow V_3 = \{(x,y,z) \mid x=0 \text{ et } z=2y\}.$$

C'est une droite située dans le plan (y,z), passant par l'origine $(0,0,0)$, et de pente 2 (coef. angulaire).

(c) Pour voir que les vecteurs $(2,0,-1)$, $(0,1,0)$ et $(0,1,3)$, sont lin. indt, on peut par ex. calculer le dét. de la matrice qu'ils constituent :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 1.0 = 6 \neq 0$$

Comme ce dét. est non nul, les 3 vecteurs sont lin^t indépendants.

Une autre manière (+ longue) est de montrer que la seule solution du système d'équations :

$$\lambda(2,0,-1) + \mu(0,1,0) + \gamma(0,1,3) = (0,0,0)$$

et la solution $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$.

Ce système se réécrit :

$$\begin{cases} 2\lambda = 0 \\ \mu + \gamma = 0 \\ -\lambda + 3\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -\gamma \\ 3\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Donc les vecteurs sont bien linéairement indépendants.

Examen de MATH F-112 de Janvier 2019 – MATHÉMATIQUES

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

SECTION:

Q. Théoriques		/10
Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 12
Exercice 4		/10
Exercice 5		/ 8
Total		/ 60

QUESTIONS THÉORIQUES

(1) Soient x et y deux nombres réels. Exprimer (sans donner de justification) $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x), \cos(y)$ et $\sin(y)$.

(2) Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ désignent deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$, définissez leur produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ et exprimez $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ en fonction de $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et de l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

EXERCICE 1

En utilisant un changement de variable judicieux, calculer

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^{2t}-1}\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 2

Résoudre, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x+y \quad +z=2 \\ 2x+y \quad +z=3 \\ 3x+y \ +3z=-1 \end{cases}$$

EXERCICE 3

On rappelle que la fonction tangente est définie, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On rappelle aussi que la fonction tan admet une *fonction réciproque* sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qu'on notera ici arctan:

$$\arctan :]-\infty, +\infty[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan(x).$$

(1) Montrer que

$$\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2.$$

(2) Montrer que, pour tout $y \in]-\infty, \infty[$:

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

[Indication: utiliser la question 1.]

(3) Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction arctan en 0.

EXERCICE 4

Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $A = (4, -2, 1)$ et perpendiculaire à la droite d'équations

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

EXERCICE 5

Résoudre l'équation

$$\log_9(x^3) + 2\log_3\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Examen de MATH F-112 de JUIN 2019 – PARTIE Q1 DU MODULE T

BA1 BIOL/CHIM/IRBI/SCIE/INFO

Durée: 2h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Exercice 4		/10
Total		/ 40

EXERCICE 1

En utilisant *la méthode du pivot de Gauss* et en justifiant à chaque étape les opérations effectuées, résolvez le système linéaire suivant d'inconnues (x, y, z, t):

$$\begin{cases} x - 2y - t = -5 \\ x - y + z - t = -2 \\ 2x - y + z - 2t = -3 \\ 3x + 3y + 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

Correction: On écrit le système sous la forme d'une matrice augmentée:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Les opérations sur les lignes donnent alors:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow \frac{1}{3}L_4}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Les deux dernières équations sont incompatibles donc le système n'a pas de solutions.

EXERCICE 2

(1) Soit $R > 0$. Calculer

$$\int_3^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}.$$

(2) Est-ce que $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ existe? (Autrement dit: est-ce que l'intégrale converge?). Si oui, donner sa valeur.
(3) Soit $2 < r < 3$. Calculer $\int_r^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.
(4) Est-ce que $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ existe? Si oui, donner sa valeur.

Correction:

(1) Le polynôme de second degré $x^2 - 3x + 2$ a pour racines 1 et 2 et se factorise sous la forme suivante:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Par le cours, on sait alors que la fraction rationnelle $\frac{1}{x^2-3x+2}$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2},$$

où a et b sont deux constantes que nous devons déterminer. On réduit au même dénominateur:

$$\begin{aligned}\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2} &= \frac{a(x - 2) + b(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} \\ &= \frac{(a + b)x - 2a - b}{x^2 - 3x + 2}.\end{aligned}$$

Nous avons donc $a+b=0$ et $-2a-b=1$, ce qui donne alors $b=1$ et $a=-1$. On a donc:

$$\begin{aligned}\int_3^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} &= \int_3^R \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(x-2)-\ln(x-1)\right]_3^R \\ &= \left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_3^R \\ &= \ln\left(\frac{R-2}{R-1}\right)-\ln(\frac{1}{2}) \\ &= \ln\left(\frac{R-2}{R-1}\right)+\ln 2.\end{aligned}$$

(2) Par définition, $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ existe si $\int_3^R\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ a une limite lorsque R tend vers $+\infty$, et dans ce cas la valeur de $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ est cette limite. Comme

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R-2}{R-1}=1,$$

par la question précédente et la règle de composition des limites on a

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_3^R\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

(3) **On connaît déjà une primitive de $\frac{1}{x^2-3x+2}$ qu'on a calculée à la question** (1) **donc on réutilise le calcul ici:**

$$\begin{aligned}\int_r^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} &= \left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_r^3 \\ &= -\ln 2+\ln\left(\frac{r-1}{r-2}\right)\end{aligned}$$

(4) Comme $\lim_{r\to 2}\ln\left(\frac{r-1}{r-2}\right)=+\infty$ l'intégrale $\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ n'existe pas.

EXERCICE 3

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Correction:
On définit, pour tout entier $n \geq 0$, la proposition suivante:

$$\text{P(n)} : \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Initialisation: d'un côté, $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$. D'un autre côté, $\frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$. Ces deux quantités sont égales, et donc $P(0)$ est vraie.

Étape de récurrence: supposons que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq 0$. On veut montrer que $P(n+1)$ est encore vraie, et donc on calcule la somme de gauche:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3,\end{aligned}$$

où pour écrire cette dernière égalité on a utilisé l'hypothèse de récurrence. On continue alors le calcul:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est démontrée.

EXERCICE 4

On rappelle que les fonctions *sinus et cosinus hyperbolique* sont données, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{et} \quad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

(3) On admet que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque, notée $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(4) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Correction:

(1) On calcule:

$$\begin{aligned}\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

(2) Comme la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $-e^{-x}$ il sort:

$$\sinh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$

et de même pour la dérivée de $\cosh(x)$.

(3) Par la formule de la dérivée des fonctions réciproques on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\text{argsh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{argsh}(x))}.$$

En utilisant la question (1) on trouve:

$$\cosh(\text{argsh}(x))^2 - \sinh(\text{argsh}(x))^2 = 1,$$

et comme par définition $\sinh(\text{argsh}(x)) = x$ on trouve

$$\cosh(\text{argsh}(x)) = \sqrt{x^2+1}.$$

La dérivée de argsh est alors:

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(4) On calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$: par la dérivée des fonctions composées on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1} \times \frac{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x(x^2+1)+x(x^2+1)-x^2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x^2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{(x^2+1)(x^2+1)-x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Les deux fonctions considérées ont même dérivée donc sont égales à une constante près. Comm elles valent toutes les deux 0 en 0 elles sont donc égales.

Examen de MATH F-112 de JUIN 2019 – PARTIE Q2 DU MODULE T

Durée: 1h30

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Total		/ 20

EXERCICE 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

(1) Calculer le gradient de f et la matrice Hessienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Pour chaque point critique, déterminer sa nature (c'est-à-dire: dire si c'est ou non un maximum local ou un minimum local).
(3) Soit $R > 0$. On note C la région de l'espace $\mathbb{R}^3$ égale à l'intersection entre le demi-cylindre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ et la région située en-dessous du graphe de la fonction f.

    Calculer le volume de C.

Correction:

(1) Le gradient est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ composé des dérivées partielles de f:

$$\nabla f(x, y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big).$$

En dérivant d'abord par rapport à x (en considérant y comme une constante) et ensuite par rapport à y on trouve:

$$\nabla f(x, y) = \Big(\frac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{-2y}{(1 + x^2 + y^2)^2}\Big).$$

La matrice Hessienne est la matrice formée par les dérivées partielles secondes:

$$\mathrm{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

En dérivant les expressions des dérivées partielles précédentes on trouve alors:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

(2) On rappelle que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour f si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Avec l'expression trouvée ci-dessus on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

Le point $(0,0)$ est donc le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$. En remplaçant x et y respectivement par 0 et 0 dans l'expression de la Hessienne de f, la matrice Hessienne de f en $(0,0)$ vaut:

$$\mathrm{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut 4, qui est strictement positif. Comme -2 est strictement négatif, $(0,0)$ est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$ (et en particulier un minimum global, car c'est le seul point critique).

(3) Par définition, le volume de la région C est donné par la double intégrale:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(C) &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

On calcule cette intégrale avec un changement de coordonnées polaires (ρ, θ), où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le domaine sur lequel on intègre devient dans ces coordonnées:

$$\Big\{0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\Big\}.$$

L'élément de volume se transforme comme $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$, de sorte que le volume de C se calcule comme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(C) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{1+\rho^2} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{1+\rho^2} \mathrm{d}\rho \\
&= \Big[\pi \ln(1+\rho^2)\Big]_0^R \\
&= \pi \ln(1+R^2).
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y' - 5x^4 y = 5x^4.$$

(1) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y' - 5x^4 y = 0.$$

(2) Donner une solution particulière de l'équation

$$y' - 5x^4 y = 5x^4.$$

(3) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants:

$$\begin{cases} y' - 5x^4 y = 5x^4 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y' - 5x^4 y = 5x^4 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

On considère maintenant l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

(4) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(5) Montrer que, pour une certaine valeur de β qu'on déterminera, la fonction $x \mapsto \beta x^2 e^x$ est une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

(6) Donner alors toutes les solutions de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

Correction

(1) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors

$$y' - 5x^4 y = 0 \iff \frac{y'}{y} = 5x^4 \iff \int \frac{y'}{y} \mathrm{d}x = \int 5x^4 \mathrm{d}x \iff \ln|y| = x^5 + C$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Ceci donne donc:

$$|y| = e^C e^{x^5} = C' e^{x^5}$$

et donc

$$y = C' e^{x^5}$$

pour une contante $C' \in \mathbb{R}$.

(2) Pour ce genre d'équations on commence toujours par chercher une solution constante. Dans ce cas $y(x) = a$ est solution si et seulement si

$$-5x^4 a = 5x^4 \iff a = -1.$$

$y(x) = -1$ est donc une solutions constante de l'équation. Sinon la méthode de la variation des constantes permet de retrouver cette solution particulière.

(3) La solution générale de l'équation différentielle $y' - 5x^4 y = 5x^4$ est donc donnée par:

$$y(x) = -1 + C' e^{x^5}$$

pour $C' \in \mathbb{R}$.

Si on impose $y(0) = 3$ on a alors $3 = y(0) = -1 + C'$ et donc $C' = 4$. La solution du premier problème de Cauchy est donc

$$y(x) = -1 + 4e^{x^5}.$$

Si on impose en revanche $y(0) = -1$ on a alors $-1 = y(0) = -1 + C'$ et donc $C' = 0$. La solution du deuxième problème de Cauchy est donc

$$y(x) = -1.$$

(4) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

dont 1 est **une racine double.** La solution générale de l'équation homogène est ainsi donnée par:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

pour deux constante C_1 et C_2.

(5) Soit $y_0(x) = \beta x^2 e^x$. Alors:

$$y_0'(x) = \beta(2x + x^2)e^x,$$
$$y_0''(x) = \beta(2 + 4x + x^2)e^x.$$

Ainsi, y_0 est solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = 3e^x$ si et seulement si:

$$\beta(2 + 4x + x^2)e^x - 2\beta(2x + x^2)e^x + \beta x^2 e^x = 3e^x$$
$$\iff e^x \left(2\beta + 4\beta x - 4\beta x + \beta x^2 - 2\beta x^2 + \beta x^2\right) = 3e^x$$
$$\iff 2\beta e^x = 3e^x \iff \beta = \frac{3}{2}.$$

La solution particulière cherchée est ainsi

$$y_0(x) = \frac{3}{2}x^2 e^x.$$

(6) Toutes les solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 3e^x$ sont alors données par:

$$y(x) = \frac{3}{2}x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Examen de MATH F-112 d'AOÛT 2019 – PARTIE Q1 DU MODULE T

BA1 BIOL/CHIM/IRBI/SCIE/INFO

Durée: 2h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Exercice 4		/10
Total		/ 40

EXERCICE 1

(1) Calculer le produit scalaire *et* le produit vectoriel des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$.

(2) Écrire l'équation *cartésienne* du plan passant par le point $A = (1, 1, 1)$ et orthogonal à la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -5t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}$$

(3) Soit D la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $B = (1, 1, 1)$. Est-ce que le plan d'équation cartésienne

$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

contient D?

EXERCICE 2

(1) Calculer

$$\int_1^e \ln x \mathrm{d}x.$$

(2) Calculer

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} \mathrm{d}x.$$

EXERCICE 3

On considère la fonction

$$f(x) = x\cos(x^2)$$

définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
(2) Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f en 0.
(3) Calculer

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 4

Résoudre l'équation

$$\log_8(x^3) + \log_2(4 - x) = 2.$$

Correction

Faculté des Sciences

Interrogation de Mathématiques — Math-F-112

(Titulaires : J. De Saedeleer, D. Leemans, M. D'Adderio)

29 Octobre 2019

Sections: BIOL1, CHIM1, GEOG1, GEOL1, INFO1, IRBI1, SCIE1

Consignes :

- Indiquez votre nom, prénom et matricule aux endroits indiqués et sur chaque feuille que vous rendez.
- Répondez aux questions à choix multiple en noircissant la case appropriée.

Votre NOM et Prénom :

Votre section :

Votre matricule, à noircir :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Les questions qui suivent sont à choix multiple, répondez-y en cochant la case appropriée.

Question 1 Parmi les fonctions suivantes quelle est celle qui est paire ?

- ■ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 1$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin(x)$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 + x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2 - x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + x + 2$

Question 2 Le produit $(5, 2, 3) \times (1, 3, 2)$ vaut

- ☐ $(3, 2, -1)$
- ■ $(-5, -7, 13)$
- ☐ $(7, 13, 2)$
- ☐ $(-5, 7, 13)$
- ☐ $(1, 5, -5)$
- ☐ $(13, 3, -3)$

Question 3 Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1$?

- ☐ $\{\pi/4 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/2 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/4 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ■ $\{k\pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}$

Question 4 Le point symétrique au point $(1, 1)$ par rapport à la droite d'equation $y = 3 - x$ est le point de coordonnées

- ■ $(2, 2)$
- ☐ $(3, -1)$
- ☐ $(2, 4)$
- ☐ $(-1, 1)$
- ☐ $(0, 0)$
- ☐ $(-2, 1)$

Question 5 Si x est tel que $log_x 5 = 2$, x vaut

- ■ $\sqrt{5}$
- ☐ 125
- ☐ 25
- ☐ $1/5$
- ☐ 5
- ☐ $\sqrt{25}$

Question 6 Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les lettres X, Y, Z, T, U et V ?

- ☐ 108
- ■ 216
- ☐ 120
- ☐ 45
- ☐ 180
- ☐ 28

CORRECTION

Question 7 Lesquelles des argumentations suivantes sont correctes ?

- ☐ Quand il pleut je prend mon parapluie. J'ai pris mon parapluie aujourd'hui. Donc il pleut aujourd'hui.
- ■ Aucun étudiant n'est agé de plus de 45 ans. Alfred a 60 ans. Alfred n'est donc pas un étudiant.
- ☐ Tout étudiant étudie durant le week-end. Jacques travaille le vendredi. Jacques n'est donc pas étudiant.
- ☐ Aucun étudiant ne possède une voiture. Donc aucun conducteur n'est étudiant.
- ☐ Tout étudiant a le droit de vote. Jules a voté, Jules est donc un étudiant.

Question 8 L'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $a = (1, 2, 3)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $b = (1, 1, 1)$ et $c = (0, 1, 2)$ est

- ☐ $x + 2y + z = 16$
- ☐ $z = 5$
- ☐ $y - 2z = 6$
- ☐ $x + y + z = 12$
- ☐ $x + z = 8$
- ■ $x - z + 2 = 0$

Question 9 Le cosinus de l'angle $-2\pi/3$ vaut

- ☐ $\sqrt{3}/2$
- ☐ $-\sqrt{3}/2$
- ■ $-1/2$
- ☐ $-\sqrt{2}/2$
- ☐ $1/2$
- ☐ $\sqrt{2}/2$

Question 10 Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $x + 2z = 2019$?

☐ -5 ■ -2 ☐ 0 ☐ 5 ☐ -4 ☐ 3

MATH-F-111 : Examen janvier 2020

1) Trouver l'équation cartésienne
   a. du plan passant par le point (-1, 1, -1) et orthogonal au vecteur (1, 2, 1)
   b. du plan passant par le point (1, -1, 2) et parallèle aux vecteurs (1, 1, 2) et (0, 1, 4)
   c. du plan passant par le point (0, -2, 2) et contenant la droite d'équations
      x + 3y – z = 7
      3x -2y + 2z = 8

2) Calculer l'intégrale définie suivante :

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-7x+10}$$

3) Résoudre le système d'équations suivant :

   x + y + z = 2
   x – y + z = -1
   x + 3y + z = 5

4) Calculer les asymptotes de la fonction suivante :

$$\sqrt{x^2+1}+x$$

5) Calculer le développement de Taylor d'ordre 5 en 0 pour la fonction sin(x)

6) Quelle est la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-x}{x^2}\right)$$

7) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.

$$\begin{matrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

8) Résoudre :
   a. $\frac{1-3x}{1-x} \geq 2$
   b. $|x^2-2x-7| = 8$
   c. $\log_2(-2x+3) = \log_2(x^2-4x) - 2$

9) De combien de manières est-ce que 8 personnes peuvent être assises en ligne si
   a) Il n'y a pas de contrainte ?
   b) Il y a 5 hommes et ils doivent être assis les uns à côté des autres ?
   c) Il y a 4 couples et chaque couple doit être assis ensemble ?

Correction examen janvier 2020

① a) π ? $\pi \in (-1;1;-1)$ et $\perp$ à $(1;2;1)$

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

$\equiv x + 2y + z + d = 0$

$\Leftrightarrow -1 + x - 1 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 0 \quad \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + 2y + z = 0}$

b) $V_1(1,1,2)$ et $V_2(0,1,4)$

$$V_d = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (2;-4;1)$$

$\Rightarrow \pi \equiv 2x - 4y + z + d = 0$

$\equiv 2.1 - 4(-1) + 2 + d = 0$

car passe par $(1;-1;2)$

$\Rightarrow d = -8$

$\Rightarrow \underline{\pi \equiv 2x - 4y + z - 8 = 0}$

c) $d \begin{cases} x + 3y - z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{V_1} = (1;3;-1) \\ \bar{V_2} = (3;-2;2) \end{matrix}$

$$\bar{V_d} = \bar{V_1} \times \bar{V_2} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6-2); -(2+1); (-2-9)$$

$= (4; -3; -11)$

$\pi = 4x - 3y - 11z + d = 0$

$\Leftrightarrow -6 - 22 = -d \quad \Rightarrow d = 28 \Rightarrow \underline{\pi = 4x - 3y - 11z + 28 = 0}$

② $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$ $\quad \Delta = 9 \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} \nearrow \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 7x + 10} \overset{DFS}{=} \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x-2)}$

$= A(x-2) + B(x-5)$

$= x(A+B) - 2A - 5B$

$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 5B = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_3^4 \frac{dx}{x-5} - \frac{1}{3} \int_3^4 \frac{dx}{x-2}$

$= \frac{1}{3} \left[\ln(x-5)\right]_3^4 - \frac{1}{3} \left[\ln(x-2)\right]_3^4 \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2B - 5B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/3 \\ B = 1/3 \end{cases}$

$= -\frac{1}{3} \left(\underset{0}{\ln(1)} - \ln(2)\right) - \frac{1}{3} \left(\ln(2) - \underset{0}{\ln(1)}\right)$

$= -\frac{2}{3} \ln(2)$

③ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$ ↕ m̂ info

$\Leftrightarrow$ $L_2 \to L_2 - L_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3/2 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array}\right] \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x + z = 1/2 \\ y = 3/2 \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} z = 1/2 - x \\ y = 3/2 \end{array} \right.$

$\Rightarrow S = \{(x, 3/2, 1/2 - x)\} \quad x \in \mathbb{R}$

④ $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x \quad$ CE: $x^2 + 1 \geq 0 \to x \in \mathbb{R}$

→ pas d'AV car pas de points hors du domaine

AH: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) \left| \begin{array}{l} = +\infty + \infty = +\infty \to \text{pas d'AH en } +\infty \\ = +\infty - \infty \quad \text{FI} \end{array} \right.$

$= \lim\limits_{-\infty} \sqrt{x^2+1} + x \cdot \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - x)}{(\sqrt{x^2+1} - x)} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{-\infty} = 0^-$

→ AH ≡ $y = 0$ en $-\infty$

AO: $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} + 1\right) = \lim\limits_{\pm\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} + 1\right)$

$= \dfrac{|\cancel{x}|\sqrt{1+0}}{\cancel{x}} + 1 = 2 = m \to$ AO

$p = \lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = |x|\sqrt{1 + 1/x^2} - x$

$= |x| - x = 0$

→ AO ≡ $y = 2x$

⑤ $f(x) = \sin(x) \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x) \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x) \quad f'''(0) = -1$

$f^4(x) = \sin(x) \quad f^4(0) = 0$

$f^5(x) = \cos(x) \quad f^5(0) = 1$

$P = 0 + \dfrac{1(x-0)}{1!} + 0 + (-1)\dfrac{(x-0)^3}{3!} + 0 + \dfrac{1(x-0)^5}{5!}$

$= 0 + x + 0 - \dfrac{x^3}{3!} + 0 + \dfrac{x^5}{5!}$

$= x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

⑥ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = \frac{0}{0}$ FI → L'Hospital

$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x)-x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2}$

$= \frac{-\sin(0)}{2} = 0$

⑦ $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

mineur de ① $= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$

etc .....

$\Rightarrow \text{cof}(M^t) = \begin{pmatrix} -b & 0 & ab \\ 0 & 0 & -b \\ 1 & -1 & 2-a \end{pmatrix}$

et $\det(M) = 1\begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -b$

$\Rightarrow M^{-1} = \frac{\text{cof}(M^t)}{\det(M)}$ $\Rightarrow$ CE: $b \neq 0$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{a-2}{b} \end{pmatrix}$

⑧ a) $\frac{1-3x}{1-x} \geq 2$ CE: $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\rightarrow \text{dom } f =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

$1-3x \geq 2(1-x)$

$1-3x \geq 2-2x$

$-3x+2x \geq 2-1$

$x \leq -1$

b) $|x^2-2x-7| = 8$

$\begin{vmatrix} x^2-2x-7 = 8 \\ x^2-2x-7 = -8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Delta = 64 \\ \Delta = 0 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} \nearrow 5 \\ \qquad\qquad \searrow -3 \\ x_{3,4} = \frac{2 \pm 0}{2} \nearrow 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow Sol = \{-3; 1; 5\}$

$\begin{vmatrix} x^2-2x-15 = 0 \\ x^2-2x+1 = 0 \end{vmatrix}$

c) $\log_2(-2x+3) = \log_2(x^2-4x) - 2$

CE: $-2x+3 > 0$ et $x^2-4x > 0$

$\Rightarrow x < 3/2$

$\Rightarrow 0 > X$

	0	4	
x	− 0	+	+
$x-4$	−	− 0	+
	+	−	+

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{-2x+3}{x^2+4x}\right) = -2$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+3}{x^2+4x} = 1/4$ $\Rightarrow x^2+4x-12 = 0$ $\Delta = 64$ $x_{1,2} = \begin{vmatrix} 2 \\ -6 \end{vmatrix}$

(9) a) $8!$ (pas de contraintes) = $46\,233$

b) - entre eux, il y a $5!$ possibilités de s'assoir
- il y a 4 possibilités pour qu'ils soient assis à côtés
- il y a $3!$ possibilités pour les personnes restantes

Donc $4 . 5! . 3! = 2880$

c) - il y a 2 possibilités pour chaque couple donc 2^4 possibilités
- il y a $4!$ possibilités d'emplacement des couples

Donc $4! \, 2^4 = 384$

MATH-F-112 : Examen juin 2020 ModuleT

1) Quelle est la longueur de la courbe donnée par la paramétrisation suivante ?

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos(3t), \sin(3t), 4t)$$

solution : 5

2) Que vaut le déterminant de la matrice suivante ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

solution : $1 - (a^2 + b^2 + c^2) + 2abc$

3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x^2 + 5y^3$

Quelle est la direction de plus grande pente au point (1, -1) ?

solution : (4, 15)

4) Que vaut $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x) + 3x}{x^2}$?

solution : Elle n'existe pas

5) Calculer le produit vectoriel suivant : (1, 3, 7) x (4, 6, 7)

solution : (-21, 21, -6)

6) Calculer l'intégrale suivante, où D est le disque centré en (0, 0) et de rayon 1.

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 + 6}{\pi} dxdy$$

solution : 6,5

7) Quels types d'asymptotes possède cette fonction ?

$$f : dom(f) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{10x^2 + 7}{5x + 6}$$

solution : f possède une asymptote verticale et une asymptote oblique

8) Que vaut la pente de la droite d'équation 9x + 4y = 2 avec une précision de 0,01 ?

solution : -2,25

9) Dans le champ des nombres complexes, que vaut $(1+\sqrt{3}i)^9$?

solution : -512

10) Soit l'équation différentielle y'' + 3y' + 2y = 0. Résoudre le problème de Cauchy y(0) = 4 et y'(0) = 7. En déduire la valeur de y''(0).

solution : -29

Module S juin 2020 – Michele D'Adderio

Note: cette année l'examen s'arrêtait aux suites à cause du covid-19.

1. L'intégrale $\int_\gamma F(\ x,y)\cdot \boldsymbol{ds}$ où $F(x,y)=(y,x)$ et γ et l'arc de cubique déterminé par $y=x^3+x^2+x+1\ , 0\le x\le 1$, vaut :

- 1
- -4
- 0
- -1
- 4

2. La suite $(a_n)_{n\in N}$ définie par $a_n=(-\frac{1}{3})^n$

- est décroissante et convergente
- n'est ni croissante ni décroissante mais convergente
- est croissante et divergente
- est croissante et convergente
- n'est ni croissante ni décroissante et diverge

3. Que vaut $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n\,n^3+2n}{4n^3-5}$?

- 1/4
- 0
- Elle n'existe pas
- +∞
- -1/4

4. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} n^2\sin(\frac{1}{n})$?

- +∞
- 0
- 1
- Elle n'existe pas
- -1

5. Soit *D* le disque de rayon 1 centré à l'origine. L'intégrale $\iint_D(y^2-2x)\,dx\,dy$ est égale à :

- $\oint_C(2xydx+xy^2\,dy)$ où C est le cercle paramétré par $(\cos t\ ,\sin t), t\in[0,2\pi]$
- 0
- $\oint_C(2xdx+2dy)$ où C est le cercle paramétré par $(\cos t\ ,\sin t), t\in[0,2\pi]$
- $\oint_C(2xdx+2dy)$ où C est le cercle paramétré par $(-\cos t\ ,\sin t), t\in[0,2\pi]$
- $\oint_C(2xydx+xy^2\,dy)$ où C est le cercle paramétré par $(-\cos t\ ,\sin t), t\in[0,2\pi]$

6. Un potentiel pour $f(x,y,z)=(e^x,z,y+2z)$ est :

- $F(x,y,z)=yz^2e^x$
- $F(x,y,z)=(e^x,0,2)$
- $F(x,y,z)=e^x+yz+z^2$

- $F(x,y,z) = e^x + 2$
- $F(x,y,z) = (e^x, yz, yz + z^2)$

7. Les courbes de niveau de $F(x,y) = \exp\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$ sont :

- uniquement des paraboles
- des cercles
- des droites
- des paraboles et une droite
- des hyperboles

8. On considère la suite définie par la récurrence suivante :

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$

Calculer a_{12}.

- 12
- 233
- 377
- 11
- 144

9. La valeur au point (1,0,0) du rotationnel de $F(x,y,z) = (y + x, z^2, -5)$ est :

- (0,0,-1)
- n'existe pas
- (-2,0,-1)
- 0
- -1

10. Considérons les fonctions $f(x) = 3x$ et $g(x) = -(x-1)^2 + 3$. Calculer l'aire du domaine délimité par ces deux fonctions et le côté positif de l'axe des abscisses.

- $-2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$
- $\sqrt{3} + 3$
- $\sqrt{3} - 3$
- $2\sqrt{3} + \frac{3}{2}$
- $2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

Module S juin 2020 – Michele D'Adderio Correction

1. 4
2. N'est ni croissante ni décroissante mais convergente
3. Elle n'existe pas
4. $+\infty$
5. $\oint_C (2xydx + xy^2\,dy)$ où C est le cercle paramétré par $(\cos t\,, \sin t), t \in [0,2\pi]$
6. $F(x,y,z) = e^x + yz + z^2$
7. Des paraboles et une droite
8. 233
9. (0,0,-1)
10. $2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

Question 1

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère la suite définie par la récurrence suivante :

$a_0 = 3, a_n = -a_{n-1} + 3$ pour tout $n \geq 1$.

Calculer a_5.

Veuillez choisir une réponse :

- 1. 3
- 2. 0
- 3. 9
- 4. 10
- 5. 6

La réponse correcte est : 0

Question 2

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6n-1}{n+1000}$.

Laquelle des affirmations suivantes est-elle vraie?

Veuillez choisir une réponse :

- i. La série converge car le numérateur est beaucoup plus petit que le dénominateur
- ii. La série converge car son terme général tend vers 0
- iii. La série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0
- iv. La série ne converge pas absolument mais converge simplement
- v. La série est convergente et cela peut se voir par le critère de la racine

La réponse correcte est : La série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0

Question 3

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

La valeur au point $(0, 0, -1)$ du rotationnel de $F(x, y, z) = (y + x, z^2, -5)$ est :

Veuillez choisir une réponse :

1. $(-2, 0, -1)$
2. n'existe pas
3. $(2, 0, -1)$
4. 0
5. 1

La réponse correcte est : $(2, 0, -1)$

Question 4

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

Un potentiel pour $f(x, y, z) = ((2x + 1)y, x^2 + x, 3z^2)$ est :

Veuillez choisir une réponse :

1. $F(x, y, z) = (x^2, y, z^3)$
2. $F(x, y, z) = 2y + 1 + 6z$
3. $F(x, y, z) = (yx^2, yx, z^3)$
4. $F(x, y, z) = yx(x + 1) + z^3$
5. $F(x, y, z) = 2y + 6z$

La réponse correcte est :
$F(x, y, z) = yx(x + 1) + z^3$

Question 5

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants:

$(1,0,0)$ et $(2,0,2)$.

Lequel des vecteurs suivants peut-on ajouter aux deux vecteurs précédents afin de constituer une base de notre espace vectoriel?

Veuillez choisir une réponse :

- a. $(2,0,1)$
- b. $(1,0,3)$
- c. $(0,0,0)$
- d. $(2,0,0)$
- e. $(0,-1,0)$

La réponse correcte est : $(0,-1,0)$

Question 6

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

La surface $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ peut être paramétrisée par

Veuillez choisir une réponse :

- I. les coordonnées sphériques : $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$, avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$
- II. les coordonnées cartésiennes : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $z \geq 0$
- III. les coordonnées sphériques : $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$, avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- IV. les coordonnées cylindriques : $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = z$, avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $z \geq 0$
- V. les coordonnées cartésiennes : $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ et $z \geq 0$

La réponse correcte est : les coordonnées sphériques : $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$, avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Question 7

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ la base B suivante:

$e_1 = (2, 1), e_2 = (1, 1).$

On considère ensuite la nouvelle base B' constituée des vecteurs:

$f_1 = (3, 3), f_2 = (3, 1).$

Laquelle des matrices suivantes est-elle la matrice de changement de base permettant de passer de B à B'?

Veuillez choisir une réponse :

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

La réponse correcte est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Question 8

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est la suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Voici deux affirmations:

Affirmation A: Le vecteur $(0, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

Affirmation B: $\lambda = 3$ est une valeur propre.

Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est vraie?

Veuillez choisir une réponse :

- A et B sont toutes deux fausses.
- Seule A est vraie.
- Seule B est vraie.
- A et B sont toutes deux vraies.

La réponse correcte est : A et B sont toutes deux vraies.

Question 9

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = e^{3n+1}$

Veuillez choisir une réponse :

1. n'est ni croissante ni décroissante et diverge
2. est croissante et convergente
3. est croissante et non bornée
4. n'est ni croissante ni décroissante mais convergente
5. est non bornée et convergente

La réponse correcte est : est croissante et non bornée

Question 10

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

L'intégrale $\iint_S dS$, où
$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$, vaut

Veuillez choisir une réponse :

- A. -2π
- B. 2π
- C. 0
- D. $\frac{\pi}{2}$
- E. π

La réponse correcte est : 2π

Examen de MATH F-112 de Janvier 2022 – MATHÉMATIQUES

NOM PRÉNOM:

MATRICULE:

SECTION:

Exercice 1		/14
Exercice 2		/20
Exercice 3		/16
Exercice 4		/20
Exercice 5		/15
Exercice 6		/15
Total		/100

CORRIGÉ

ATTENTION:
1. Vous ne pouvez sortir de la salle sans remettre définitivement votre copie ni sans autorisation.
2. Toute calculatrice et tout objet connecté (même éteint) sont formellement interdits.
Les seuls documents autorisés sont ceux que nous vous fournissons.

Toute tentative de fraude ou de communication sera sévèrement sanctionnée.

1. Ecrivez immédiatement vos **nom, prénom et matricule** sur cette page.
2. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie.
Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.
Les brouillons ne seront en aucun cas lus ni corrigés.
3. **Ne dégrafez pas** les feuilles !
4. Les réponses doivent être **soigneusement justifiées** sauf mention expresse du contraire.
5. Ecrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.
6. Vous pouvez écrire vos réponses **au verso des pages** et **au crayon** mais **pas en rouge**.
7. L'examen dure **3 heures**.

EXERCICE 1

(a) (/4) Enoncer la formule du binôme de Newton.

(b) (/5) Aotearoa est le nom d'origine de la Nouvelle Zélande. Combien de mots peuvent être obtenus en réarrangeant les lettres du mot AOTEAROA ?

(c) (/5) Vérifier la parité de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |\cos(3x)|$$

et donner sa (plus petite) période.

Réponse question 1 :

CORRIGÉ

(a)

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
$$= \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n$$
$$= y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + x^n.$$

(b) On a 8 lettres parmi lesquelles deux se répètent : A, 3 fois, et O, 2 fois. On peut donc obtenir

$$\frac{8!}{3!\,2!} = \frac{8.7.6.5.\overset{2}{\cancel{4}}.\cancel{3}.\cancel{2}}{\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{2}} = (7.6).8.10 = (42.8).10$$
$$= 3360$$

Réponse question 1 (suite):

mots en réarrangeant les lettres du mot AOTEAROA

1c) Parité : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = |\cos(3.(-x))| = |\cos(-3x)|$$

$$= |\cos(3x)|$$

(puisque $\cos(-t) = \cos(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$)

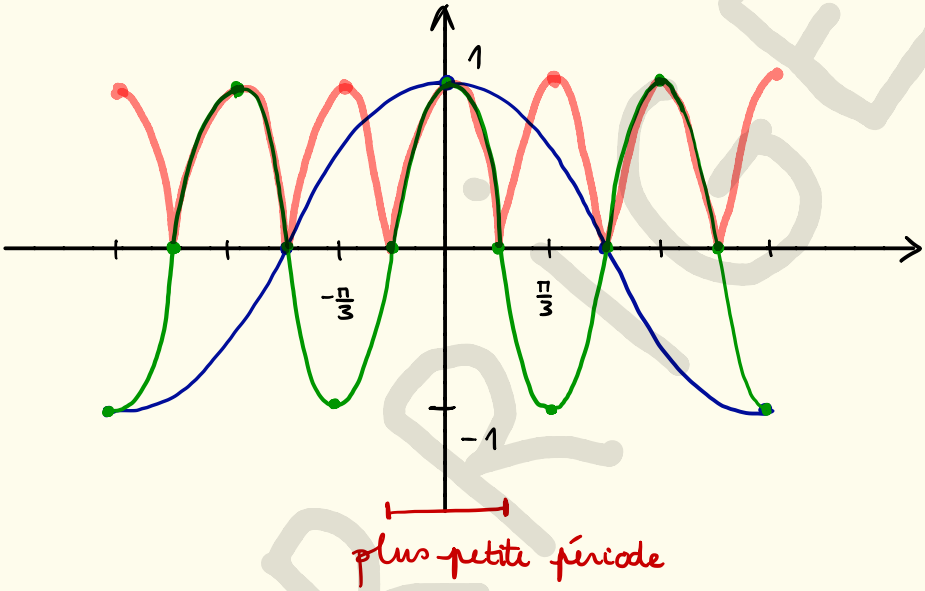
$$= f(x)$$

Donc f est paire.

Périodicité : La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est périodique de période 2π donc la fonction $x \longmapsto \cos(3x)$ et périodique de période $\frac{2\pi}{3}$ et la fonction $x \mapsto |\cos(3x)|$

CORRIGÉ

de période $\dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$



CORRIGÉ

EXERCICE 2

(a) (/8) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwar z.

(b) (/3) Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwar z avec les vecteurs $(2, 1, -1)$ et $(-1, 2, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(c) (/9) Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d'équations

$$D_1 \equiv 1 - x = \frac{y-2}{2} = z - 1$$

et passant par la droite d'équations

$$D_2 \equiv \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 9 \\ z = 3 - t \end{cases} .$$

Réponse question 2 :

(a)

Résultat (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous **vecteurs** $\vec{a}, \vec{b}$ *de* $\mathbb{R}^n$, *on a*

$$\left|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right| \leq \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|.$$

CORRIGÉ

Réponse question 2 (suite) :

Proof.

Pour tout nombre réel t, on calcule la quantité $\langle \vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle$. Elle est positive par définition du produit scalaire. Nous pouvons la ré-écrire grâce à la bilinéarité sous la forme :

$$\begin{aligned}\langle (\vec{a} + t\vec{b}), (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle &= \langle \vec{a}, (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle + t\langle \vec{b}, (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \|\vec{b}\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Mais cette expression est un polynôme du second degré. Si elle est positive pour toute valeur de t c'est que son discriminant est négatif:

$$\left(2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right)^2 - 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \leq 0$$

qui donne alors:

$$\left|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

qui est l'inégalité annoncée. □

(b) On calcule

$$\begin{aligned}|\langle (2,1,-1), (-1,2,1) \rangle| &= |2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1| \\ &= |-2 + 2 - 1| \\ &= |-1| \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\|(2,1,-1)\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

et $$\|(-1,2,1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

On a bien

$$|\langle (2,1,-1),(-1,2,1)\rangle| = 1$$

$$\leq 6 = \sqrt{6}.\sqrt{6} = \|(2,1,-1)\|.\|(-1,2,1)\|,$$

comme l'affirme l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(c) On a

$$D_1 \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

donc D_1 a un vecteur directeur $(-1,2,1)$.

Sur base de ses équations paramétriques, D_2 a un vecteur directeur $(2,1,-1)$.

Comme Π est parallèle à D_1 et D_2, un vecteur normal de Π est donné par

CORRIGÉ

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-1 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$(3, -1, 5)$ est également un vecteur normal à Π.

Comme Π passe par D_2, tout point de D_2 appartient à Π.

On a, par exemple, $(1, 9, 3) \in \Pi$.

Donc

$$\Pi \equiv 3(x-1) - (y-9) + 5(z-3) = 0$$

c'est-à-dire

$$\Pi \equiv 3x - y + 5z - 6 = 0$$

ou $\Pi \equiv 3x - y + 5z = 6$.

CORRIGÉ

EXERCICE 3

(a) (/8) Donner l'ensemble S des solutions à l'équation

$$2 - x = \log_3(3^x - 8).$$

(b) (/8) Donner l'ensemble T des solutions à l'équation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1.$$

Réponse question 3 :

(a) Conditions d'existence :

$3^x - 8 > 0$

Sous les conditions d'existence, on a

$2 - x = \log_3(3^x - 8)$

$\Leftrightarrow 3^{2-x} = 3^x - 8$

$\Leftrightarrow \frac{3^2}{3^x} = 3^x - 8$

$\Leftrightarrow 9 = (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

CORRIGÉ

Réponse question 3 (suite) :

En posant $t = 3^x$ on obtient

$$t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-9)(t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 9 \text{ ou } t = -1$$

Comme $t = 3^x > 0$, on rejette $t = -1$ et on obtient $3^x = 9$ donc $x = 2$.

Cette solution satisfait les conditions d'existence.

On a $S = \{2\}$.

CORRIGÉ

(b) $1\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

(en divisant par $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$)

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

(avec $k \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow x = 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

On a

$T = \left\{2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

CORRIGÉ

EXERCICE 4

Considérer la fonction réelle donnée par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}$.

(a) (/3) Déterminer le (plus grand) domaine de f.

(b) (/3) Montrer que $\frac{x^2+x+7}{x-1} = x + 2 + \frac{9}{x-1}$.

(c) (/5) La fonction f admet-elle des points critiques sur son domaine ? Si oui, trouver leurs coordonnées et les caractériser.

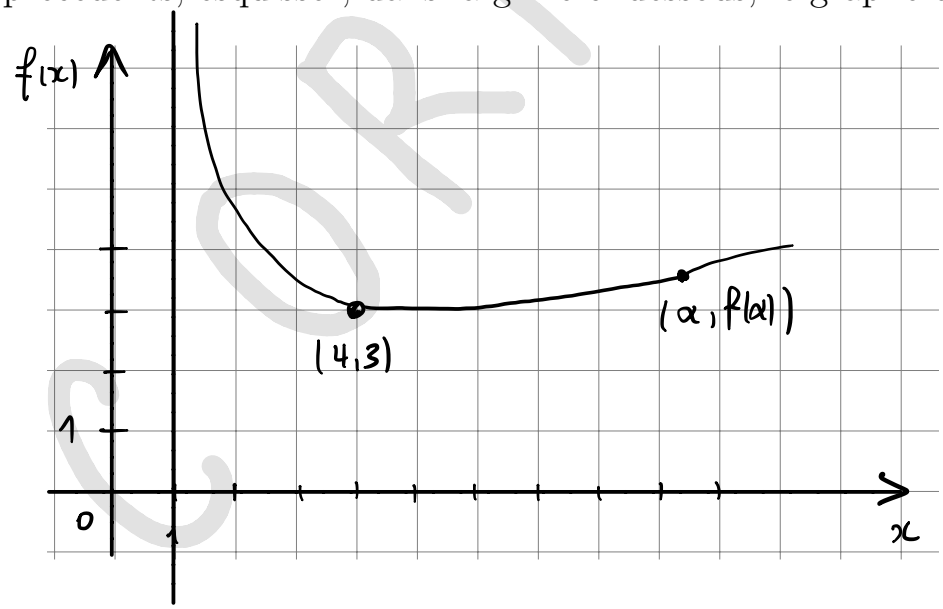
(d) (/5) Déterminer les asymptotes de f s'il en existe.

(e) (/4) Voici le tableau de variation de f'' :

x		1		α	
$f''(x)$		∄	$+$	0	$-$

où $\alpha \approx 9,39$ et $f(\alpha) \approx 3,53$.

En utilisant ce tableau et les informations collectées aux points précédents, esquisser, dans la grille ci-dessous, le graphe de f.



Réponse question 4 :

(a) Le delta de x^2+x+7 est $1^2 - 4.7 = -27 < 0$ et son coefficient de tête est $1 > 0$ donc $x^2 + x + 7 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

CORRIGÉ

Réponse question 4 (suite) :

		1	
$x-1$	$-$	0	$+$
x^2+x+7	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2+x+7}{x-1}$	$-$	$\nexists$	$+$

$$\text{dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x+7}{x-1} \geqslant 0 \right\}$$

$$=]1, +\infty[$$

(b) $$x+2+\frac{9}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)+9}{x-1}$$

$$= \frac{x^2+2x-x-2+9}{x-1}$$

$$= \frac{x^2+x+7}{x-1}$$

CORRIGÉ

(c) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}} \cdot \left(\frac{x^2+x+7}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}} \cdot \left(x+2+\frac{9}{x-1}\right)'$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}}}_{>0} \cdot \left(1-\frac{9}{(x-1)^2}\right)$$

On a $f'(x) = 0$ lorsque $\frac{9}{(x-1)^2} = 1$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \pm 3$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

Comme $-2 \notin \text{dom} f$, on a un unique point critique en $x = 4$.

CORRIGÉ

Les coordonnées du point du graphe ayant cette abscisse sont $(4, f(4)) = \left(4, \sqrt{\frac{16+4+7}{4-1}}\right)$

$= (4, 3)$

x	1		4	
f'	‖	$-$	0	$+$
f	‖ ↘		$(4,3)$ est un minimum local de f	↗

(d) Asymptotes verticales ?

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x+2+\frac{9}{x-1}}$$

$x+2 \to 3$, $\frac{9}{x-1} \to +\infty$

$= +\infty$

Asymptote verticale en $x = 1$

CORRIGÉ

Asymptotes horizontales ?

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\underbrace{x+2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{9}{x-1}}_{0}}$$

$$= +\infty$$

Pas d'asymptote horizontale

Asymptotes obliques ?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2+\frac{9}{x-1}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+2+\frac{9}{x-1}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^2(x-1)}} = 0$$

Pas d'asymptote oblique

CORRIGÉ

10

EXERCICE 5

(a) (/5) Enoncer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

(b) (/10) Calculer l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 4}.$$

Réponse question 5 :

(a)

Theorem (Théorème fondamental)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en x = a.

(b)

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x - 4} = \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \cdots$$

$t = \sin x$

$dt = \cos x\, dx$

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2}$$

$$= \frac{A(t-2) + B(t+2)}{(t+2)(t-2)}$$

$$= \frac{(A+B)t + 2(B-A)}{t^2-4}$$

CORRIGÉ

Réponse question 5 (suite) :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(B-A)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \quad (1) \\ B-A=\frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $2B=\frac{1}{2} \Leftrightarrow B=\frac{1}{4}$

Dans (1) : $A=-B=-\frac{1}{4}$

$$\cdots = \int \frac{dt}{t^2-4} = \int \left(\frac{\frac{-1}{4}}{t+2} + \frac{\frac{1}{4}}{t-2} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-2}$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|t+2| + \frac{1}{4} \ln|t-2| + cst$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left| \frac{t-2}{t+2} \right) + cst$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| + cst$$

CORRIGÉ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - 4}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} - 2}{\sin \frac{\pi}{2} + 2} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin 0 - 2}{\sin 0 + 2} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-2}{1+2} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{-2}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 1$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3}$$

$$\left(= -\frac{1}{4} \ln 3 \right).$$

CORRIGÉ

EXERCICE 6

(a) (/10) Montrer, par récurrence, que la n-ième dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto xe^{-x}$ est

$$f^{\underline{n}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n e^{-x}(x - n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (/5) Donner la série de Taylor de la fonction f autour de $x = 0$.

Réponse question 6 :

(a) Initialisation : $n = 0$

$f^{\underline{0}}(x) = f(x) = xe^{-x} = (-1)^0 e^{-x}(x-0)$

Hypothèse de récurrence :

$f^{\underline{n}}(x) = (-1)^n e^{-x}(x-n)$ pour un $n \in \mathbb{N}$

Étape de récurrence :

$$f^{\underline{n+1}}(x) = \left(f^{\underline{n}}(x)\right)' = \left((-1)^n e^{-x}(x-n)\right)'$$

$$= (-1)^n (-1) e^{-x}(x-n) + (-1)^n e^{-x} \cdot 1$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x}(x-n) - (-1)^{n+1} e^{-x}$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x}\left[(x-n) - 1\right]$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x}\left(x - (n+1)\right)$$ CQFD

CORRIGÉ

Réponse question 6 (suite) :

(b) La série de Taylor de f autour de 0 est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}(x-0)^{n} = \underbrace{f(0)}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} e^{-0}(0-n)}{n!} x^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(n-1)!} x^{n}$$

CORRIGÉ

Examen de MATH F-112
2ième Quadrimestre
13 Juin 2022

NOM:
PRÉNOM:
MATRICULE:
SECTION:

Exercice 1		/25
Exercice 2		/25
Exercice 3		/25
Exercice 4		/25
Total		/100

ATTENTION:
1. Vous ne pouvez pas sortir de la salle sans remettre définitivement votre copie, ni sans autorisation.
2. Toute calculatrice et tout objet connecté (même éteint) sont formellement interdits.
Les seuls documents autorisés sont ceux que nous vous fournissons.

Toute tentative de fraude ou de communication sera sévèrement sanctionnée.

1. Ecrivez immédiatement vos **nom, prénom, matricule et section** sur cette page.
2. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie.
Vous n'avez PAS le droit à vos propres feuilles de brouillon.
Les brouillons ne seront en aucun cas lus ni corrigés.
3. **Ne dégrafez pas** les feuilles !
4. Les réponses doivent être **soigneusement justifiées** sauf mention expresse du contraire.
5. Ecrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.
6. Vous pouvez écrire vos réponses **au verso des pages** et **au crayon** mais **pas en rouge**.
7. L'examen dure **2 heures**.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

(a) (/6) Trouver l'ensemble T des solutions complexes à l'équation

$$t^2 - 2t + 2 = 0.$$

(b) (/9) A l'aide du point (a), trouver l'ensemble S des solutions complexes à l'équation

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0.$$

(c) (/10) Enoncer et démontrer la formule de De Moivre.

Réponse question 1 :

(a) $t^2 - 2t + 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

Les racines complexes de -4 sont $\pm 2i$

$$t_{1\atop 2} = \frac{-(-2) \pm 2i}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

On trouve $T = \{1+i, 1-i\}$

(b) Posons $t = z^3$.

On a $z^6 - 2z^3 + 2 = 0 \iff t^2 - 2t + 2 = 0$

Donc, par (a),

$z^3 = t = 1 \pm i$

CORRIGÉ

Réponse question 1 (suite):

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$$

$$1-i = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$$

$$\rho^3 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \rho = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$3\theta = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$$

On trouve

$$S = \left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\psi} : \psi = \frac{\pi}{12} \text{ ou } -\frac{\pi}{12} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{12} \text{ ou } \frac{17\pi}{12} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \right\}$$

(c) Formule de De Moivre :

$$\left(\rho \exp(i\theta)\right)^n = \rho^n \exp(in\theta) \qquad \forall\, n \geq 1$$

CORRIGÉ

Démonstration :

- Cas de base : $n = 1$

$$(\rho \exp(i\theta))^1 = \rho \exp(1\theta) = \rho^1 \exp(i\,1.\theta)$$

- Supposons que

$$(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta)$$

pour un certain $n \geq 1$ fixé.

- $(\rho \exp(i\theta))^{n+1}$

$$= \rho \exp(i\theta) \cdot (\rho \exp(i\theta))^n$$

$$= \rho \exp(i\theta) \cdot \rho^n \exp(in\theta)$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \rho \cdot \rho^n \exp(i(\theta + n\theta))$$

$$= \rho^{n+1} \exp(i(n+1)\theta)$$

□

EXERCICE 2

(a) (/12) Donner l'ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^3$ des solutions au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ -4x - 5y + 5z = 3. \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

(b) (/8) Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) (/5) Ecrire le système linéaire suivant sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 7z = 0 \end{cases}$$

A l'aide du point (b) et **sans** effectuer de calculs, justifier du fait que son unique solution dans $\mathbb{R}^3$ est $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Réponse question 2 :

(a) Appliquons la méthode de Gauss à la matrice augmentée associée au système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$ ⇝

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Réponse question 2 (suite) :

$$\begin{matrix} L_2 \to L_2 + 4L_1 \\ \rightsquigarrow \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 15 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_2 \to \frac{1}{3}L_2 \quad \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} L_3 \to L_3 + L_2 \\ \rightsquigarrow \\ L_1 \to L_1 - 2L_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée réduite. Le système donné est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x = -7 \\ y - z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = z + 5 \end{cases}$$

CORRIGÉ

On a

$$S = \{(-7, z+5, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

(b) En développant selon la 3e colonne,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -(-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-4-(-9)) + 7 \cdot (2-3)$$

$$= 5 - 7 = -2$$

(c) La forme matricielle du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Comme $\det M \neq 0$, M est inversible donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'unique solution à notre système est $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

EXERCICE 3

(a) (/4) Définir la notion de *point critique* d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(b) (/14) Considérer la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2.$$

Trouver ses points critiques ET déterminer leur nature respective.

(c) (/7) Intégrer la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 7x$$

sur la région de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2 + 3$ et $y = 2x^2 + 2$.

Réponse question 3 :

(a) On appelle point critique de f tout point $a \in \mathbb{R}^n$ intérieur au domaine de f tel que $\nabla f(a) = \vec{0}$

CORRIGÉ

Réponse question 3 (suite) :

(b) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$

$= (3x^2+6x, 3y^2-12y)$

(x,y) est un point critique de f

ssi $\nabla f(x,y) = (0,0)$

ssi $\begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ 3y^2-12y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x+2)=0 \\ 3y(y-4)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } x=-2 \\ y=0 \text{ ou } y=4 \end{cases}$

On a 4 points critiques :

$(0,0), (0,4), (-2,0)$ et $(-2,4)$

CORRIGÉ

Déterminons la nature de ces points critiques.

On a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

On

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x+6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y-12$$

Donc

$\rightarrow \det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = -72 < 0$

de sorte que $(0,0)$ est un point de selle

$\rightarrow \det H_f(0,4) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 72 > 0$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,4) = 6 > 0$ de sorte que $(0,4)$ est un minimum local

$\rightarrow \det Hf(-2,0) = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = 72 > 0$

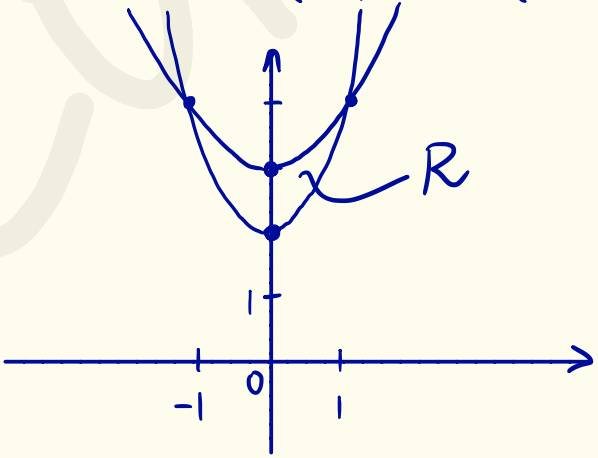
et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,0) = -6 < 0$ de sorte que $(-2,0)$ est un maximum local

$\rightarrow \det Hf(-2,4) = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = -72 < 0$

de sorte que $(-2,4)$ est un point de selle

(c) On a $x^2+3 = 2x^2+2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$. Les deux paraboles s'intersectent en $(-1,4)$ et $(1,4)$.



Nommons R la région qu'elles délimitent

$$\iint_R 7x \, d(xy)$$

$$= 7 \int_{-1}^{1} \int_{x^2+3}^{2x^2+2} x \, dy \, dx$$

$$= 7 \int_{-1}^{1} \left[xy \right]_{y=x^2+3}^{2x^2+2} dx$$

$$= 7 \int_{-1}^{1} x \underbrace{\left(2x^2+2 - (x^2+3) \right)}_{x^2-1} dx$$

$$= 7 \int_{-1}^{1} (x^3 - x) \, dx$$

$$= 7 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{x=-1}^{1}$$

$$= 7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right) = 0$$

EXERCICE 4

(a) (/5) Définir la notion de *problème de Cauchy*.

(b) (/5) Vérifier que

$$y_0(x) := \sin x + \cos x$$

est une solution particulière à l'équation

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x.$$

(c) (/8) Donner la solution générale à l'équation non-homogène

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x.$$

(d) (/7) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Réponse question 4 :

(a) Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle ordinaire d'ordre $n \geq 1$ $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0 : $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, où $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ sont des constantes données.

CORRIGÉ

Réponse question 4 (suite) :

(b) $y_0(x) = \sin x + \cos x$

$y_0'(x) = \cos x - \sin x$

$y_0''(x) = -\sin x - \cos x$

$y_0'' - 4y_0' + 4y_0$

$= -\sin x - \cos x - 4(\cos x - \sin x) + 4(\sin x + \cos x)$

$= \sin x(-1 - 4(-1) + 4) + \cos x(-1 - 4 + 4)$

$= 7\sin x - \cos x$

Comme requis.

(C) Equation homogène associée :

$y_H'' - 4y_H' + 4y_H = 0$

Equation caractéristique et solution :

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

CORRIGÉ

Solution générale à l'équation homogène associée :

$$y_{SGHA}(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Solution générale à l'équation non-homogène :

$$y(x) = (Ax+B)e^{2x} + \cos x + \sin x$$

(d) $1 = y(0) = B + 1 \iff B = 0$

$$y'(x) = 2(Ax+B)e^{2x} + Ae^{2x} - \sin x + \cos x$$

$$2 = y'(0) = 2B + A + 1 \iff A = 1 - 2B = 1$$

Solution unique au problème de Cauchy :

$$y(x) = xe^{2x} + \cos x + \sin x$$

Examen de MATH-F115

Compléments d'analyse et algèbre linéaire

Correction

14 juin 2022

Section A

Répondre à toutes les trois questions dans cette section.

A1 (a) Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ une courbe avec parametrisation $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ qui est continûment différentiable. Soit $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs continu.
Définir la circulation de $\mathbf{F}$ le long de C (aussi appelé le travail fournit).

(b) Soit C la courbe avec parametrisation $\gamma\colon [0,\pi/4] \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ et $\mathbf{F}(x,y,z) = (z,x,y)$.
Calculer la circulation de $\mathbf{F}$ le long de C.

Réponse A1.

(a) La circulation de $\mathbf{F}$ le long de C est

$$\int_C \langle \mathbf{F}, \mathbf{dx} \rangle = \int_a^b \big\langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle \, \mathrm{d}t$$

(Il suffit d'écrire l'intégrale à droite.)

3 points

(b)

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0) \\ \gamma'(t) &= (-\sin(t), \cos(t), 0) \\ \mathbf{F}(\gamma(t)) &= (0, \cos(t), \sin(t)) \\ \big\langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle &= \cos^2(t) \end{aligned}$$

On voit alors que la circulation de $\mathbf{F}$ le long de C est donnée par l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(t) \mathrm{d}t$$

2 points

Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser l'identité

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$$

D'ici on voit que

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(t) \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} \right|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

5 points

A2 Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elle converge lorsque $n \to \infty$ et, quand elle converge, calculer sa limite.

(a) $x_n = \frac{n^3+1}{n^3-2}$.

(b) $x_n = \frac{(-1)^n n^3+1}{n^3-2}$.

(c) $x_n = \frac{n^3+1}{n^3-2\sin(n)}$.

Réponse A2

(a)

$$x_n = \frac{n^3+1}{n^3-1} = \frac{1+1/n^3}{1-2/n^3}$$

Or, $1/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et donc $1/n^3 \to 0$ aussi. Il s'ensuit par les règles de calcul que

$$x_n \to \frac{1+0}{1-0} = 1$$

2 points

(b)

$$x_n = \frac{(-1)^n n^3+1}{n^3-2} = \frac{(-1)^n + 1/n^3}{1-2/n^3}$$

On considère les deux sous-suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}). On a

$$x_{2k} = \frac{1+1/8k^3}{1-1/4k^3} \to \frac{1+0}{1-0} = 1$$

au vu du fait que $1/k^3 \to 0$ lorsque $k \to \infty$. En même temps,

$$x_{2k+1} = \frac{-1+1/(2k+1)^3}{1-2/(2k+1)^3} \to \frac{-1+0}{1+0} = -1$$

au vu du fait que $1/(2k+1)^3 \to 0$ lorsque $k \to \infty$.
Nous avons donc deux sous-suites ayant des limites différentes. Nous concluons donc que (x_n) ne converge pas.

4 points

(c)

$$x_n = \frac{n^3+1}{n^3-2\sin(n)} = \frac{1+1/n^3}{1-2\sin(n)/n^3}$$

On va démontrer que $\sin(n)/n \to 0$. D'ici les règles de calcul impliquent que $\lim x_n = 1$.
Pour le voir, constatons que $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ et donc

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Les bornes supérieure et inférieure ont la même limite, qui vaut zéro. Il s'ensuit alors (par le théorème du sandwich) que $\lim \frac{\sin(n)}{n} = 0$ aussi.

4 points

A3 Considérons la rotation du plan $\mathbb{R}^2$ autour de l'origine par un angle de θ radians dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

(a) Donner la matrice M_θ qui correspond à cette rotation par rapport à la base standard de $\mathbb{R}^2$.

Conseil: dessiner les images de la base standard:

$$M_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Etant donné deux angles θ et ϕ, expliquer pourquoi $M_\theta M_\phi = M_{\theta+\phi}$ (où au coté gauche on prend le produit matriciel).

(c) A partir de l'identité $M_\theta M_\phi = M_{\theta+\phi}$, démontrer que

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$\sin(\theta+\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$$

Réponse A3.

(a)

$$M_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Alors

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

3 points

(b) La matrice associée à la composition de deux applications linéaire et le produit matriciel de leurs matrices. De coup on a que $M_\theta M_\phi$ est la matrice associée a l'application "faire d'abord une rotation par un angle ϕ et puis faire une rotation par un angle θ". Mais cette composition est la même chose que faire une seule rotation par un angle $\theta+\phi$, ce qui explique pour quoi $M_\theta M_\phi = M_{\theta+\phi}$.

On ne peut pas utiliser les identités de partie (c) pour démontrer que $M_\theta M_\phi = M_{\theta+\phi}$.

3 points

(c)

$$\begin{aligned} M_\theta M_\phi &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\theta)\sin(\phi) - \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} \\ M_{\theta+\phi} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le fait que $M_\theta M_\phi = M_{\theta+\phi}$ donne maintenant les deux identités. Par exemple, en comparant les coins supérieurs à gauche, on obtient que

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$$

Egalement les coins inférieurs à gauche donnent

$$\sin(\theta+\phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)$$

4 points

Section B

Répondre à deux parmi les trois questions dans cette section.

B1 (a) Soit $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs continûment différentiable. Définir la divergence de $\mathbf{F}$.

2 points

(b) Soit $R \subset \mathbb{R}^3$ une région bornée dont le bord S est une surface continûment différentiable par morceaux. Enoncer le théorème de la divergence, qui lie le flux de $\mathbf{F}$ à travers S à une intégrale triple.

8 points

(c) Appliquer le théorème de la divergence pour calculer $\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{dA} \rangle$ où

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$$

et $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est la sphère de rayon 1, centrée en l'origine, avec normale positive vers l'extérieure.

10 points

Réponse B1.

(a) Soit $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. La divergence de $\mathbf{F}$ est

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

2 points

(On accepte aussi la notation $\langle \nabla, \mathbf{F} \rangle$ pour la divergence.)

(b) Le théorème de la divergence dit que

$$\int_R \operatorname{div}(\mathbf{F}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{dA} \rangle$$

où dans le coté droite le normale positive à S point vers l'extérieur.
(Attention, il faut absolument préciser l'orientation de S!)

8 points

(c) Le théorème de la divergence donne que

$$\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{dA} \rangle = \int_R \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

où $R = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est la boule de rayon 1, centrée en l'origine.
Calculons

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(zx^2) = y^2 + z^2 + x^2$$

On doit alors calculer l'intégrale

$$I = \int_R (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

2 points

Pour le faire on utilise les coordonnées sphériques:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

où R corresponde à la région $\theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi], r \in [0,1]$. La fonction dont on prend l'intégral est $x^2+y^2+y^2 = r^2$. En même temps, on doit aussi insérer la facteur due au changement de coordonnées, $r^2\sin\theta$. On voit donc que

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1} r^4 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

4 points

Nous prenons les intégrales dans l'ordre r, θ, ϕ mais n'importe fonctionne aussi bien.

$$\begin{aligned} I &= [r^5/5]_0^1 \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{5}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{5}[-\cos(\theta)]_0^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{2}{5}\int_{\phi=0} 2\pi\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

4 points

B2 (a) Soit f une fonction lisse. Définir la série de Taylor de f (autour de $x = 0$).

4 points

(b) Calculer la série de Taylor de la fonction $f(x) = \cos(x)$ (autour de $x = 0$) et déterminer son rayon de convergence.

8 points

(c) Approcher $\cos(0,1)$ avec une précision de $0,000001 = (0,1)^6$.

8 points

Réponse B2.

(a) La série de Taylor de f autour de $x = 0$ est la série suivante:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

(Pour avoir tous les points, il faut décrire d'une manière ou l'autre le terme générale, et préciser que la série a un nombre infini de termes.)

4 points

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) \\ f'(x) &= -\sin(x) \\ f''(x) &= -\cos(x) \\ f'''(x) &= \sin(x) \\ f''''(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

A partir d'ici le pattern se répète. On obtient alors que

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= -1 \\ f'''(0) &= 0 \\ f''''(0) &= 1 \end{aligned}$$

etc. D'ici on voit que la série de Taylor de $\cos(x)$ autour de $x = 0$ est

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

(Ce n'est pas nécessaire de donner la forme du terme générale à condition que l'idée est claire)

8 points

(c) Le théorème de Taylor dit que si $|f^{(k+1)}(x)| \leq C$ pour tout $x \in [-1, 1]$ alors,

$$|f(x) - T_k(x)| \leq \frac{C}{(k+1)!}|x|^{k+1}$$

où $T_k(x)$ est le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Taylor.
Dans notre cas $f(x) = \cos(x)$, quelque soit k et x, $|f^{(k+1)}(x)| \leq 1$ (puisque $f^{(k+1)}(x)$ est soit $\pm\cos(x)$ soit $\pm\sin(x)$). Nous nous intéressons de $x = 0,1$ pour lequel le théorème de Taylor donne

$$|\cos(0,1) - T_k(0,1)| \leq \frac{(0,1)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Nous voulons une erreur inférieure à $(0,1)^6$. Si on prend $k = 4$ l'erreur est majorée par

$$\frac{(0,1)^5}{5!} = \frac{(0,1)^5}{125} \leq (0,1)^7$$

On doit prendre alors quatre termes de la série de Taylor pour approcher $\cos(0,1)$ avec la précision nécessaire, ce qui donne:

$$\cos(0,1) = 1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^4}{4!} = 1 - \frac{1}{200} + \frac{1}{240000} = \frac{238801}{240000}$$

8 points

B3 (a) Soit M une matrice carrée. Quand dit-on que v est un vecteur propre de M avec valeur propre λ?

5 points

(b) Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Démontrer que les valeurs propres de M sont 4 et -2.

5 points

ii. Trouver les vecteurs propres de M.

5 points

iii. Trouver une matrice inversible S telle que $S^{-1}MS$ est digaonale.

5 points

Réponse B3.

(a) Un vecteur propre de M avec valeur propre λ est un vecteur v non-nul tel que

$$Mv = \lambda v$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.
(Il faut absolument préciser que v soit non-nul.)

5 points

(b) i. Pour calculer les valeurs propres de M on calcule le polynôme caractéristique:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Les valeurs propres sont les racines de p qui sont 4 et -2

5 points

ii. Les vecteurs propres avec valeur propre 4 sont les solutions à

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ce qui revient a dire que $x = y$.
Les vecteurs propres avec valeur propre -2 sont les solutions à

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ce qui revient à dire que $x = -y$.

5 points

iii. On prend pour S une matrice dont les deux colonnes sont des vecteurs propre pour les deux valeurs propres différentes. Un choix simple est donc

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(mais il y en a d'autres!).
On devrait vérifier à la main que ça fonctione correctement. Pour calculer S^{-1}, constatons d'abord que $\det(S) = 2$ et donc

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant c'est simple de calculer

$$\begin{aligned} S^{-1}MS &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5 points

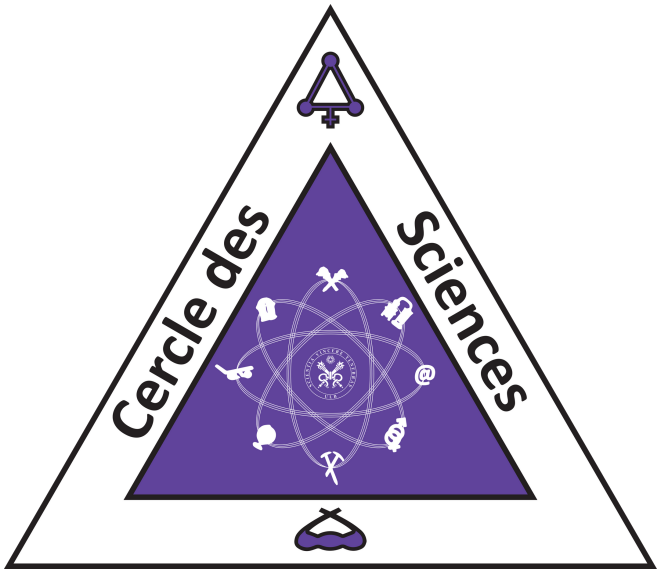
Chim-f102

Le cours de chimie organique se passe au second quadrimestre. Si vous n'avez jamais fait de chimie organique, ne vous inquiétez pas, Mme Moucheron, votre professeur reprend les bases au début du cours. Cependant, la suite du cours s'enchaine très vite et il faut donc être attentif durant celui-ci. Je vous conseille de vous procurer le syllabus le plus vite possible, pour pouvoir y noté les mécanismes. Car même si ceux si sont noté dans le syllabus ils ne sont pas complets. Ce qui est une des parties les plus importantes de l'examen qui sera un oral pour vous. Mais ne paniquez pas, même si celui ci est un oral Mme Moucheron est super super sympa. De plus, cet examen ce déroule toujours de la même manière, et est composé de trois parties : la première étant une molécule à analyser comme elle vous l'apprendra au cours (vous verrez au tout début du syllabus un exemple de molécules ainsi que les questions les plus fréquemment posées). Ensuite, la plus grosse partie de l'examen se bases sur les mécanismes réactionnels, vous verrez bien assez tôt de quoi il s'agit, je vous laisse la surprise !! Je vous laisse une liste non-exhaustives des mécanismes souvent demandés pendant l'examen ci-dessous. Et enfin vous aurez une petite présentation a faire sur une application de la chimie organique de votre choix (des exemple seront donnés aux cours).

Mécanismes importants (liste NON- EXHAUSTIVE) : Formation imine ; Réduction aldéhyde en alcool ;Formation d'un chlorure d'acide ; Oxydation d'un alcool ; Passer d'une acide carboxylique à une chlorure d'acide ; Substitution électrophile aromatique ; Hydrolyse d'un ester ; Hydrolyse d'un amide

Phys-f110

Le cours de physique, considéré par beaucoup comme le cours le plus compliqué de cette première année, est composé de deux parties: mécanique au Q1 et électromagnétisme au Q2. Mais le fonctionnement est globalement le même: il y a le cours théorique (auquel je te conseille vraiment d'aller), les séances d'exercices (auxquelles je te conseille très très vraiment d'aller) et des labos (auxquels t'es obligé.e d'aller). Les notions que tu verras sont à peu près les mêmes que celles vues en secondaire, mais tu les verras plus en profondeur et plus rigoureusement. Ne néglige pas l'importance de la théorie: de toute façon, il y a une partie théorique à l'examen, mais une bonne compréhension du cours aide sérieusement à résoudre les exercices. Après, il n'y a pas de miracle: pour savoir faire les exercices, il faut faire les exercices, et se casser la tête pour les réussir. Je te conseille d'essayer de tous les faire (même ceux de niveau III qui ont l'air un peu méchants) et de rendre tes exercices supplémentaires: un point bonus, c'est parfois très très précieux ;) Et surtout, n'hésite jamais à poser des questions. Les profs et les assistants sont là pour ça et ils peuvent vraiment t'aider!



Ex. 1 (10 points) :	Ex. 2 (10+1 points) :	Total (sur 20) :

Nom :

Section :

Interrogation de novembre

Durée : 1 heure 15

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
La clarté et la rigueur de vos justifications ont une importance capitale.

Exercice 1

1) Rappeler la définition du centre de masse G d'un système $\mathscr{S}$ de N points matériels de masses m_i placés aux points A_i, $1 \leq i \leq N$.
2) Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel. Rappeler la définition du référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ pour le système $\mathscr{S}$.
3) Si $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_G$ sont les vitesses d'un point matériel A et du centre de masse G dans le référentiel $\mathcal{R}$, $\vec{v}_A^*$ la vitesse du point A dans $\mathcal{R}^*$, trouver la relation entre $\vec{v}_A$, $\vec{v}_A^*$ et $\vec{v}_G$.
4) Montrer que l'impulsion totale $\vec{P}^*$ du système $\mathscr{S}$ dans $\mathcal{R}^*$ est nulle.
5) Énoncer et démontrer le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique (c'est-à-dire le deuxième théorème de Koenig) pour le système $\mathscr{S}$.

Exercice 2 On considère un bloc rectangulaire de masse m reposant sur une table horizontale. Les coefficients de frottement statique et dynamique associés au contact entre le bloc et la table sont notés μ_s et μ_d respectivement. Un opérateur extérieur pousse sur le bloc en lui appliquant une force $\vec{F}$ dont les caractéristiques sont indiquées sur la figure. On suppose que $0 < \theta < \pi/2$. On notera $F = ||\vec{F}||$ la norme (ou l'intensité) de la force. On pourra utiliser un système de coordonnées cartésiennes dont les axes (Ox) et (Oz) sont représentés sur la figure.

1) Donner la liste de toutes les forces qui s'exercent sur le bloc. Représenter ces forces sur un schéma.

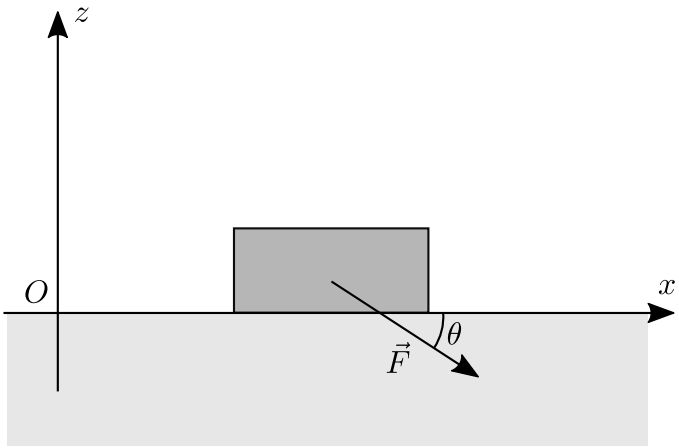


FIGURE 1 – Le bloc de masse m (rectangle grisé) posé sur une table horizontale, voir exercice 2. La force $\vec{F}$ fait un angle θ par rapport à l'horizontal.

2) On suppose que le bloc est immobile lorsque la force $\vec{F}$ lui est appliquée. Montrer qu'il existe un angle θ_0, que l'on calculera, tel que si $\theta > \theta_0$ alors le bloc ne se met jamais en mouvement, quelle que soit l'intensité de la force appliquée.

3) On suppose que $\theta < \theta_0$.

   a) Calculer l'intensité minimale $F_{\min}$ de la force à appliquer pour que le bloc se mette en mouvement.

   b) On suppose que $F > F_{\min}$. Calculer l'accélération $\vec{a}$ du bloc.

   c) (Question bonus +1) Vérifier que le sens de $\vec{a}$ est bien en accord avec l'intuition physique.

Interrogation de novembre 2017
Correction

Exercice 1

1) Si O est un point quelconque, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$:

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{OA_i}$$

2) R^* est le référentiel de centre G, en translation par rapport à R.

3) Soit O un point fixe dans R.

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} \; ; \; \vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} \; ; \; \vec{v}_A^* = \frac{d\vec{GA}}{dt}$$

$$\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_A^* + \vec{v}_G$$

↑ en dérivant par rapport à t.

4) $\vec{P}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{A_i}^*$

On obtient $\vec{P}^* = \vec{0}$ en dérivant par rapport à t

$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{GA_i} = \vec{0}$

qui est un cas particulier de l'identité de la question 1) pour $O \equiv G$.

5) 2e th. de Koenig :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^{\,2}$$

↑ énergie cinétique totale dans R inertiel

↖ énergie cinétique propre = énergie cinétique totale dans R^*.

Dém : $E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{A_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{A_i}^* + \vec{v}_G)^2$

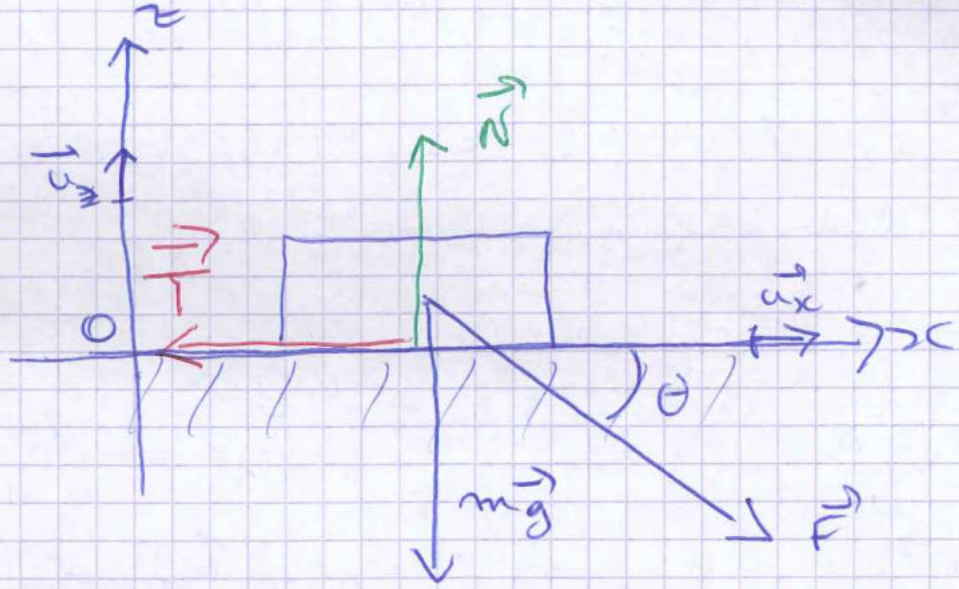
définition — question 3)

$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{A_i}^{*2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_G^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{A_i}^* \cdot \vec{v}_G$

$= E_c^*$; $= M$; $= \vec{P}^* = \vec{0}$

Exercice 2

1)



$\vec{F}$: force appliquée ; $m\vec{g}$ = poids

$\vec{N}$ = réaction normale de la table

$\vec{T}$ = réaction tangentielle de la table.

On notera $F = \|\vec{F}\|$, $N = \|\vec{N}\|$, $T = \|\vec{T}\|$, $g = \|\vec{g}\|$

2) Bloc immobile $\Rightarrow \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$,

soit, en décomposant sur les axes (Ox) et (Oz),

$$\begin{cases} F\cos\theta - T = 0 \\ N - mg - F\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Donc $T = F\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(N - mg) = \frac{N - mg}{\tan\theta}$

Le bloc reste immobile tant que $T \leq \mu_s N$, ce qui donne

$$\left(\frac{1}{\tan\theta} - \mu_s\right) N \leq \frac{mg}{\tan\theta}$$

ou $(1 - \mu_s \tan\theta)(mg + F\sin\theta) \leq mg$

$\Leftrightarrow F\sin\theta\,(1 - \mu_s\tan\theta) \leq mg\mu_s\tan\theta$ (Eq.)

Comme $F > 0$, $\sin\theta > 0$, $\tan\theta > 0$, cette inégalité sera toujours satisfaite, $\forall F$, ssi $1 - \mu_s \tan\theta < 0$, i.e. $\tan\theta > \frac{1}{\mu_s} \Leftrightarrow \theta > \theta_0$

où $\boxed{\tan\theta_0 = \frac{1}{\mu_s}}$

3) a) si $\theta < \theta_0$, l'éq. (Eq.) de la question précédente montre que $\boxed{F_{min} = \frac{mg\mu_s\tan\theta}{\sin\theta(1-\mu_s\tan\theta)} = \frac{m\mu_s g}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}$

b) Si $F > F_{min}$, le bloc se met en mouvement et donc $T = \mu_d N$.

Le th. de l'impulsion projeté sur les axes (Ox) et (Oy) donne alors, pour $\vec{a} = a\vec{u}_x$,

$$\begin{cases} F\cos\theta - \mu_d N = ma \\ N - mg - F\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow ma = F\cos\theta - mg\mu_d - F\mu_d\sin\theta$

$$\boxed{a = \frac{F}{m}(\cos\theta - \mu_d\sin\theta) - g\mu_d}$$

c) Question bonus :

Comme $\mu_d < \mu_s$, $\cos\theta - \mu_d \sin\theta > \cos\theta - \mu_s \sin\theta$

> 0

donc $a > 0 \iff F > \dfrac{g m \mu_d}{\cos\theta - \mu_d \sin\theta}$

On on sait que

$F > F_{min} = \dfrac{g m \mu_s}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} > \dfrac{g m \mu_d}{\cos\theta - \mu_d \sin\theta}$

car $\mu_s > \mu_d$

$\Rightarrow$ ça marche.

Question 1 (10 points) 10/10
TOUTES SECTIONS

Culture générale en physique.

La notation scientifique pour 15 km est $1{,}5 \cdot 10^4$ m.
Le préfixe correspondant à 10^3 est kilo.

1) Écrire en notation scientifique 175 milligrammes :
$175\,mg = 1{,}75 \cdot 10^{2}\,mg$
$175\,mg \cdot \frac{1\,g}{1000\,mg} = 0{,}175\,g = 1{,}75 \cdot 10^{-1}\,g$; $0{,}175\,g \cdot \frac{1\,kg}{1000\,g} = 0{,}000175\,kg = 1{,}75 \cdot 10^{-4}\,kg$

2) Écrire en notation scientifique 85 décamètres :
$85\,dam \cdot \frac{10\,m}{1\,dam} = 850\,m = 8{,}5 \cdot 10^{2}\,m$

3) Écrire le préfixe correspondant à 10^6 :
10^6 = méga (M)

4) Écrire le préfixe correspondant à 10^{-9} :
10^{-9} = nano (n)

5) Quel est le nom de la lettre grecque θ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?
theta minuscule

6) Quel est le nom de la lettre grecque λ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?
lambda minuscule

7) Écrire la lettre grecque sigma minuscule :
σ

8) Quelle est la charge d'un électron (utiliser la notation scientifique) ?
$q_{e^-} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$

9) Quel est la taille d'un proton (une erreur d'un facteur de 10 est admise pour cette question) ?
$10^{-15}\,m$

10) Donner le nom de 5 planètes du système solaire.
Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter

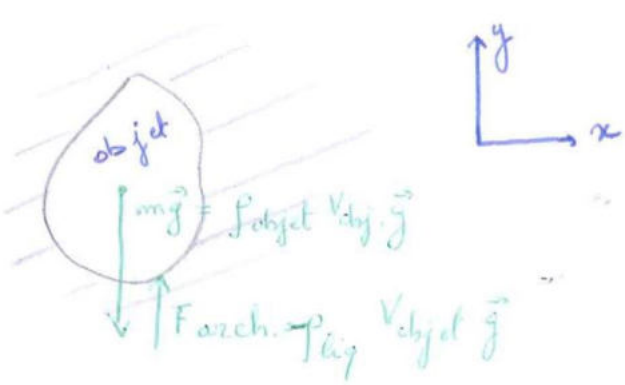
Question 2 (10 points)
TOUTES SECTIONS SAUF MATH-BIO

Définition.

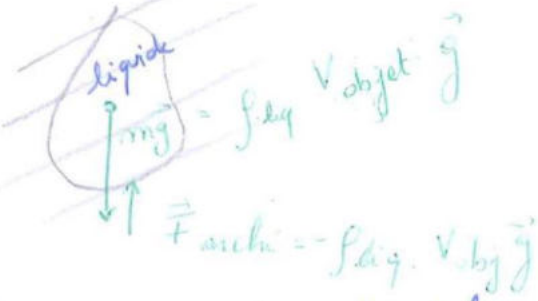
Enoncez le principe d'Archimède. Faites un schéma pour illustrer votre définition.

Lorsqu'un corps (ou une fraction de celui-ci) est immergé dans un liquide, la variation de pression entre les extrémités du dessus et du dessous engendre une force dirigée vers le haut (car comme le gradient de pression est donné par $\vec{\nabla} P = -\rho \vec{g}$, la pression va augmenter si on s'enfonce dans le liquide, la pression en dessous est plus grande qu'au dessus). ✓

①



②



Si on considère (en ②) que la masse du liquide occupé dans le même volume que l'objet est immobile, alors il y a une force égale et opposée à son poids qui s'applique sur lui et qu'on appelle la « Force d'Archimède, donnée par

$$\vec{F}_{archi} = -\rho_{liq} V_{obj} \vec{g}$$

10/10

Question 3. (10 points)
TOUTES SECTIONS

Analyse dimensionnelle.

Les vagues de grande longueur d'onde à la surface d'un liquide de grande profondeur sont caractérisées par leur longueur d'onde λ (la distance entre les crêtes des vagues), leur vitesse v, et leur amplitude A. Le liquide est caractérisé par sa masse volumique ρ et est soumis à la pesanteur g.
La vitesse de propagation des crêtes des vagues $v = v(\lambda, \rho, g)$ peut dépendre des caractéristiques du liquide (ρ, g) et de la longueur d'onde des vagues (λ), mais on observe qu'elle est indépendante de l'amplitude A (tout du moins si l'amplitude est faible).

Utilisez l'analyse dimensionnelle pour trouver la dépendance de v en λ, ρ, g.

$[\lambda] = L$

$[\rho] = M L^{-3}$

$[g] = T^{-2} L$

$[v] = L T^{-1} = [\lambda]^{\alpha} [\rho]^{\beta} [g]^{\gamma} = L^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma}$

$= L^{\alpha - 3\beta + \gamma} M^{\beta} T^{-2\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + \gamma = 1 & \Rightarrow \quad \alpha + \frac{1}{2} = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = -1 \iff \gamma = 1/2 \end{cases}$$

$v = k\sqrt{\lambda g}$ m/s où k est une constante.

10

Question 4 (10 points)
TOUTES SECTIONS

Démontrer, à partir des lois de Newton, le théorème ~~du centre~~ du moment cinétique pour un système de points matériels. Enoncez les principes ou lois auxquels vous faites appel dans votre argumentation et définissez les variables que vous utilisez.

On définit le moment cinétique comme étant

$$\vec{J}_0 := \sum_{i=0}^{n} \vec{x}_i \times \vec{p}_i \quad \text{V}$$

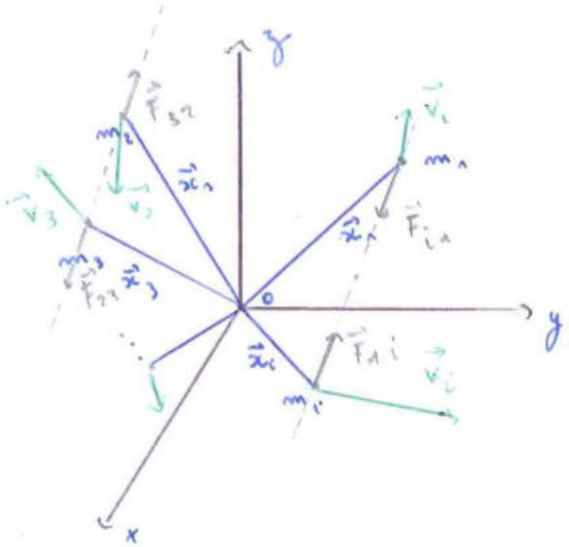
où $\vec{x}_i$ est le vecteur position de la particule i.

$\vec{p}_i$ est le vecteur quantité de mouvement donné par $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Et $\vec{J}_0$ est naturellement le vecteur moment angulaire par rapport à l'origine O.

Le moment de force par rapport à l'origine O est donné par

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{J}_0}{dt} = \sum_i^n \frac{d\vec{x}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum_i^n \vec{x}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i$$

$\frac{d\vec{x}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \parallel \vec{p}_i$ car $= \vec{0}$



Montrons que le moment de force ne est dépendant que des forces extérieures

$$\vec{M}_0 = \sum_i^n \vec{x}_i \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i}^n \vec{F}_{ij}\right)$$

$$= \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i^n \left(\vec{x}_i \times \sum_{j\neq i}^n \frac{1}{2}\left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right)\right)$$

$$= \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \left(\vec{x}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ji}\right) \quad \text{V}$$

On sait que les forces $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ en vertue du principe des forces réciproques, de plus $\vec{x}_i - \vec{x}_j \parallel \vec{F}_{ij}$.

$$\Rightarrow \vec{M}_0 = \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \underbrace{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{=\vec{0} \text{ car } \parallel} \quad \text{V}$$

Donc $\vec{M}_0^{ext} = \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext}$ V

Il s'ensuit que si

$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{J}_O = \text{cste}$$

Donc le moment cinétique est conservé en l'absence de moment ~~de force~~ extérieur.

Question 5 (10 points)
UNIQUEMENT PHYSICIENS ET MATHS-PHYSIQUE

Le déplacement vertical $y(x,t)$ d'une corde vibrante soumise à une tension T et de masse linéique μ obéit l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

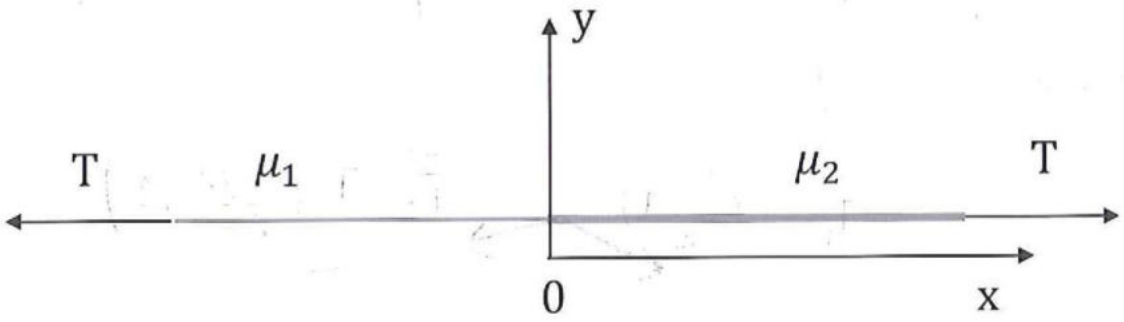
où $v^2 = T/\mu$.

La solution générale de cette équation d'onde est

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires.

Considérons une corde constituée de deux parties. Pour les x négatifs elle a une masse linéique μ_1 , tandis que pour les x positifs elle a une masse μ_2 (voir figure).



La solution générale donnée ci-dessus fournit la solution pour les x négatifs et pour les x positifs séparément. Afin de connecter ces deux solutions il faut donner des conditions de raccord en x=0.

Quelles sont ces conditions de raccord, et quelle est leur origine physique ?

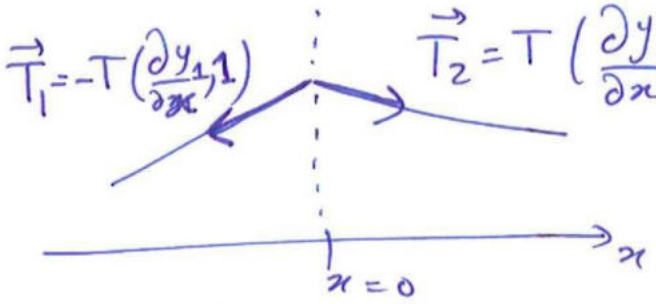
Soit $y_1(x,t)$ la solution de l'équation d'onde dans la région $x<0$
et soit $y_2(x,t)$ " " " " $x>0$.

Les conditions de raccord sont $y_1(x=0,t) = y_2(x=0,t)$ $\forall t$ ①

et $\frac{\partial y_1(x=0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y_2(x=0,t)}{\partial x}$ $\forall t$ ②

- Origine physique de la condition ①: la corde est <u>continue</u> en $x=0$.

- Origine physique de la condition ②: le point $x=0$ ne peut pas subir une accélération infinie.
En effet, le vecteur tension (dans la corde) $\vec{T}(x,t)$ au point x à l'instant t est donné par $\vec{T}(x,t) = T\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}, 1\right)$
(lorsque $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$, ce qui est nécessaire pour dériver l'équation d'onde de la corde).

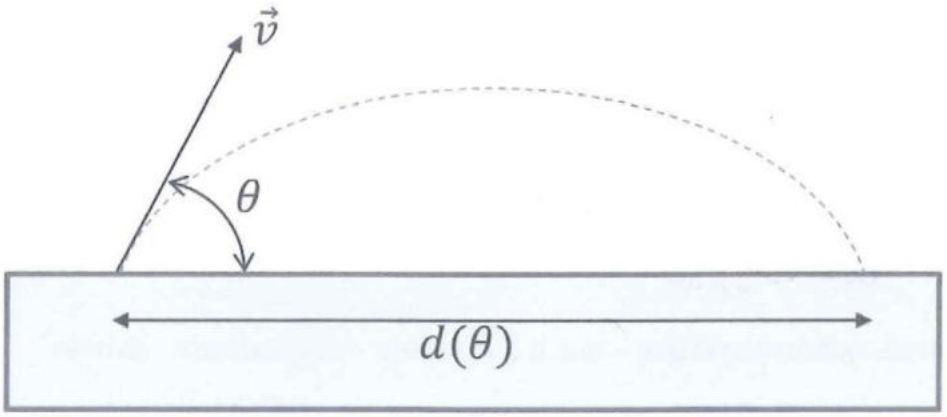


Si ② n'est pas obéit, le point $x=0$ subit une force finie (égale à $T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}, 0\right)$, voir dessin), or comme il s'agit d'un point, sa masse est nulle, et donc son accélération sera infinie (car $a = \frac{F}{m}$), ce qui n'est pas possible.

Question 1 (10 points)
TOUTES SECTIONS

11/10

Tir Balistique.



A l'instant $t = 0$ canon tire un boulet de masse m avec une vitesse $v = |\vec{v}|$ à un angle θ de l'horizontale, à partir du sol supposé horizontal. On néglige les frottements.

2

1) Donner les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse $\vec{v}$ à l'instant du tir $t = 0$ (en fonction de θ et de v).

$\vec{V} = (|\vec{v}|.\cos\theta, |\vec{v}|.\sin\theta)$ V

2

2) Pendant combien de temps l'objet est-il en l'air ?

Δt = distance $d(\theta)$ / vitesse horizontale

car V_x est constante V

Posons t_1 = temps de montée
t_2 = temps de descente

$\Rightarrow \Delta t = \dfrac{d(\theta)}{|\vec{v}|.\cos\theta} = t_1 + t_2 = \dfrac{2|\vec{v}|.\sin\theta}{g}$ V

... et on ne t'en demande pas +

MRUA $\rightarrow V_y = V_{0y} + at$. pour la montée : $0 = |\vec{v}|.\sin\theta - g t_1$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{|\vec{v}|.\sin\theta}{g}$

montée : $y = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow y = 0 + |\vec{v}|.\sin\theta . t_1 - \frac{g}{2} t_1^2$

$= \dfrac{|\vec{v}|^2 \sin^2\theta}{g} - \dfrac{1}{2}\dfrac{|\vec{v}|^2 \sin^2\theta}{g} = \dfrac{1}{2g}|\vec{v}|^2 \sin^2\theta$

descente : $0 = \dfrac{1}{2g}|\vec{v}|^2 \sin^2\theta + 0.t_2 - \dfrac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \dfrac{|\vec{v}|^2 \sin^2\theta}{g^2} \Rightarrow t_2 = \dfrac{|\vec{v}|.\sin\theta}{g}$

3

3) Quelle est la distance horizontale parcourue $d(\theta, v)$?

$d = V_x \cdot t_{tot} = V_x (t_1 + t_2)$ avec t_1 : temps pour monter, t_2 : temps pour descendre

MRUA pour la verticale $\Rightarrow$ montée : $V_y = V_{oy} + a t_1$ $\quad a = -|\vec{v}| \cdot \sin\theta - g t_1$

$\Rightarrow t_1 = \frac{|\vec{v}| \sin\theta}{g}$

$\frac{d(\theta,v)}{|\vec{v}| \cdot \cos\theta} = \frac{2 |\vec{v}| \sin\theta}{g} \Rightarrow d(\theta,v) = \frac{2 |\vec{v}|^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{|\vec{v}|^2 \sin 2\theta}{g}$ ✓

3

4) Quel angle θ faut-il choisir pour que la distance d soit maximale, $v = |\vec{v}|$ étant fixé?

+1

$d = \frac{|\vec{v}|^2 \sin 2\theta}{g}$ est maximale pour $\sin 2\theta$ maximal

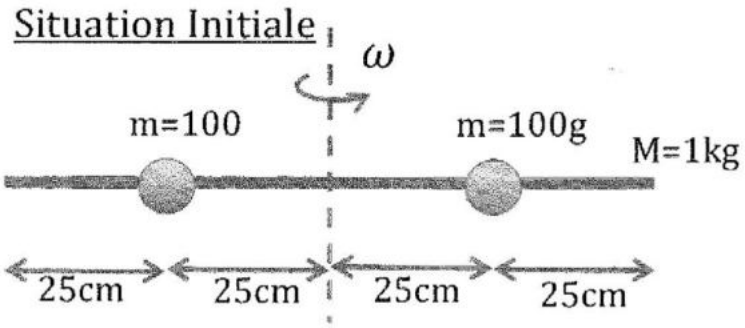
$\Rightarrow \sin 2\theta = 1$

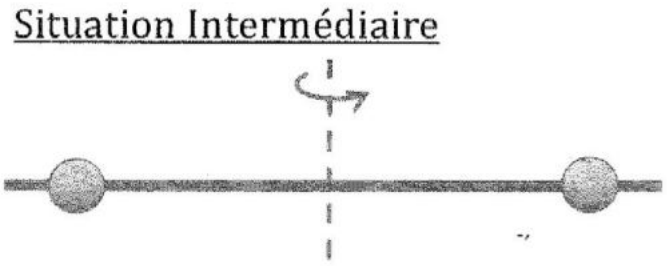
$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

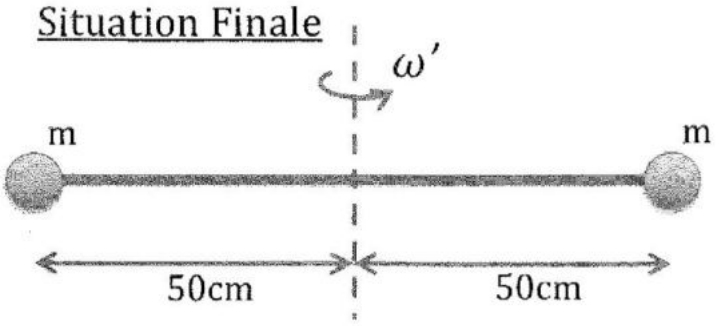
$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45°$ ✓

Question 2 (10 points).
TOUTES SECTIONS

Une barre homogène de faible section de longueur L=1m et de masse M=1kg tourne sans frottement autour d'un axe passant par son centre.
Deux masses de 100g sont attachées à 25cm de l'axe (voir figure « Situation Initiale »).
La barre effectue un tour complet autour de son axe de rotation toutes les 2 secondes.







1) Quelle est la vitesse angulaire de rotation ω de l'ensemble (barre plus les deux masses) dans la situation initiale ?

$\omega = \frac{L_0}{I}$

$I = I_{barre} + I_{masses} = \frac{1}{12} M L^2 + 2 . m . (25\,cm)^2$

$= \frac{1}{12} . 1 . 1^2 + 2 . 0,1 . (0,25)^2 = 0,096\ kg\,m^2$

$\vec{L_0} = \vec{L_0}^{tige} + \vec{L_0}^{masses}$

$= \int dx . \frac{M}{L} . x^2 .$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$ 1/1

2) Quel est le moment d'inertie de l'ensemble (barre plus les deux masses) par rapport à son axe de rotation dans la situation initiale? (Le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe de rotation est de 1/12 kg m^2).

$I = I_{barre} + I_{masses} = \frac{1}{12} + 2 . m (25\,cm)^2$

$= \frac{1}{12} + 2 . 0,1 . (0,25)^2 = 0,096\ kg\,m^2$

2/2

3) Quelle est le moment angulaire et l'énergie cinétique de l'ensemble barre plus les deux masses dans la situation initiale ?

$L_0 = \omega . I = \pi . 0,096 = \frac{23}{240}\pi \simeq 0,30\ kg\,m^2\,s^{-1}$

$E_c = E_{c\,rotation} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} . 0,096 . \pi^2 = 0,47\ J$

3/3

Les deux masses sont comme des perles : elles ont un trou en leur centre qui leur permet de glisser le long de la barre. A l'instant t=0 on libère les deux masses qui peuvent glisser librement le long de la barre (voir figures « situation intermédiaire » et « situation finale »).

4) Quel est la fréquence angulaire de rotation ω' de l'ensemble barre plus les deux masses lorsque les deux masses atteignent l'extrémité de la barre (voir figure « Situation Finale »).

en l'absence de forces extérieures : $\vec{L_0}$ est constant.

$\Rightarrow L_0 = I_1 . \omega_1 = I_2 . \omega_2$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} . \omega_1$

$I_2 = I_2^{barre} + I_2^{masses}$ car I de la barre est inchangé.

$I_2^{masse} = 2 . m . (50\ cm)^2 = 2 . 0,1 . (0,5)^2 = 0,05\ kg\,m^2$

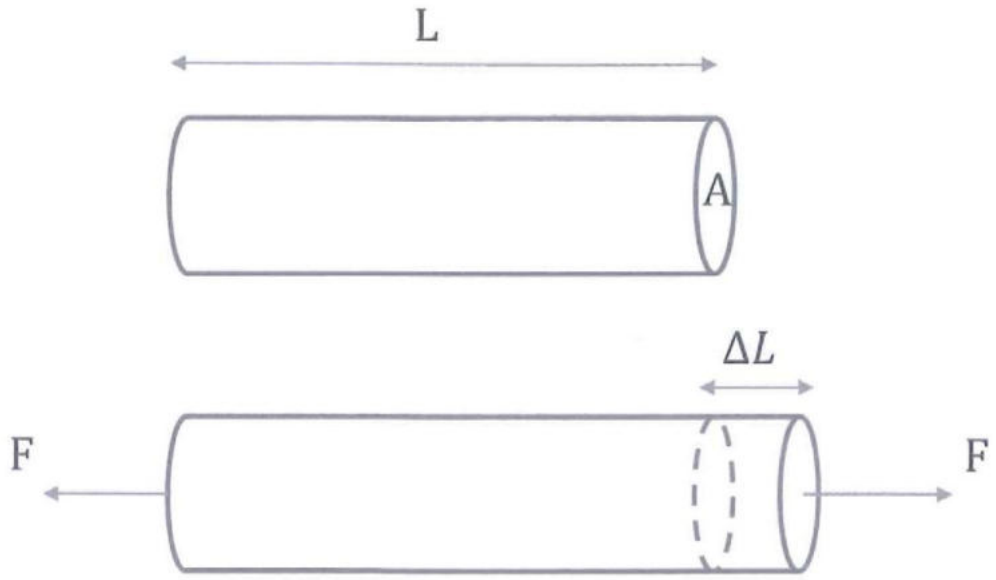
$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{12} + 0,05 = 0,13\ kg\,m^2$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{0,096}{0,13} . \pi = 2,3\ rad/s$ 4/4

Question 3 (10 points)
TOUTES SECTIONS SAUF MATH-BIO

Considérons un barreau de longueur L, de section A, de module de Young Y.
Si on exerce une force F(t) sur le barreau, il va s'allonger (voir schéma).

Note : si F(t) varie rapidement, on va exciter des ondes acoustiques dans le barreau. On supposera dans la suite que F(t) varie suffisamment lentement pour que les ondes acoustiques ne soient pas excitées, et que le barreau ait toujours sa longueur d'équilibre.



1) Quel est le travail qu'il faut effectuer pour allonger le barreau de ΔL ?

$\|\vec{F}\| = A \cdot Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$ 1/1

le travail de F pour allonger le barreau :

$$W = \int_0^{\Delta L} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_0^{\Delta L} A Y \frac{x}{L} dx$$

$$= A \frac{Y}{L} \int_0^{\Delta L} x \, dx$$

$$= A \frac{Y}{L} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\Delta L}$$

$$= A \frac{Y}{2L} \Delta L^2$$

5/5

2) Application numérique. Considérons un barreau d'acier (Module de Young de l'Acier Y=200GPa) de section 1cm², de longueur 1m.

Quelle est la force à appliquer pour allonger la barre de 1mm ?
Quel est le travail nécessaire pour allonger la barre de 1mm ?

$\|\vec{F}\| = A \cdot Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$ avec $A = 1\,cm^2 = 1 \cdot 10^{-4}\,m^2$

$Y = 200\,GPa = 200 \cdot 10^9\,Pa$

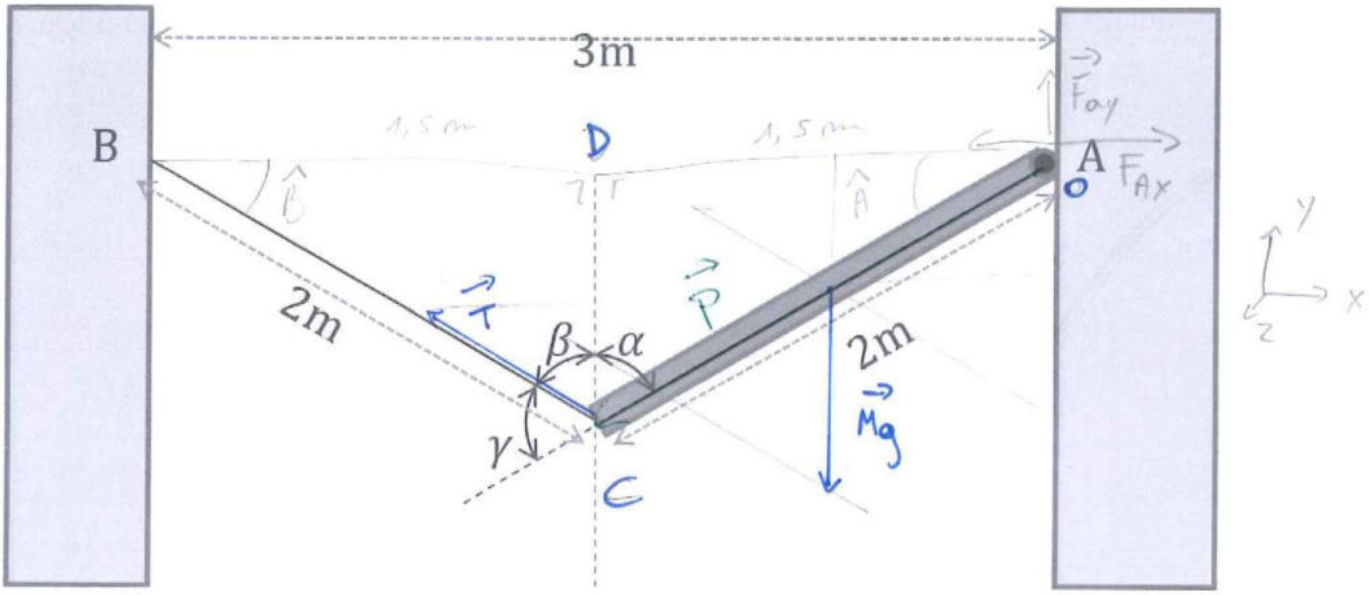
$L = 1\,m \quad \Delta L = 1 \cdot 10^{-3}\,m$

$= 1 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,Pa \cdot 1\,m \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,m = 20000\,N = 2 \cdot 10^4\,N$ 4/4

$W = A \frac{Y}{2L} \cdot \Delta L^2 = 10^{-4}\,m^2 \frac{200 \cdot 10^9\,Pa}{2 \cdot 1\,m} \cdot (10^{-3}\,m)^2 = 10\,J$

Question 4. (10 points)
TOUTES SECTIONS

Une poutre de longueur 2m et de masse 50kg est attachée à un mur au point A. La poutre est homogène : son centre de masse est donc en son centre.
A l'autre extrémité de la poutre est attaché un câble de longueur 2m et de masse négligeable. Le câble est attaché à un autre mur au point B.
Les deux murs sont séparés de 3m. Les points A et B sont à la même hauteur.



1) Quels sont les angles α, β, γ entre la poutre et la verticale, la verticale et le câble, le câble et la prolongation de la poutre (voir dessin) ? (Attention, le dessin est schématique, et les angles représentés dans le dessin ne correspondent pas exactement à la réponse attendue).

3

loi des sinus : $\frac{\sin\hat{A}}{|BC|} = \frac{\sin\hat{B}}{|AC|}$ or $|AC| = |BC| \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$

en posant C le sommet du triangle, et D l'intersection entre la verticale et |AB|. A et B sont à même hauteur → |AB| horizontal.

⇒ |DC| est perpendiculaire à AB ⇒ BCD et ACD sont des triangles semblables, et $\beta = \alpha$ ✓, $\gamma = 180° - 2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{1,5}{2} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 48,6° = \beta$ ✓ $\Rightarrow \gamma = 180° - 2.48,6°$
$= 82,8°$ ✓

2) Les forces agissant sur la poutre sont son poids, la tension T dans le câble, et la force au point d'attache A. Utilisez les conditions d'équilibre de la poutre pour déterminer la norme de la tension T dans le câble et la norme de la force agissant sur la poutre au point A.

$\vec{T}$ va dans la direct° du câble (direction : poutre → mur)

$\Rightarrow \vec{T} = (-T.\sin\beta, T\cos\beta)$

$\vec{Mg} = (0, -Mg)$

$\vec{F_A} = (F_{Ax}, F_{Ay})$

la poutre est à l'équilibre statique $\Rightarrow \Sigma\vec{F} = \vec{0}$ et $\Sigma\vec{M_0} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{T} + \vec{Mg} + \vec{F_A} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \vec{F_A} = -\vec{Mg} - \vec{T}$

$\Rightarrow F_{Ax} = T.\sin\beta$ $\quad F_{Ay} = Mg - T\cos\beta$

En mettant l'origine sur A :

$\vec{M_0} = \vec{0}$

$= \vec{0} + \vec{0} + \frac{\vec{P}}{2} \times \vec{Mg} + \vec{P} \times \vec{T}$ (avec $\vec{P}$: vecteur qui lie A à l'autre extrémité de la poutre)

$= \frac{P}{2}.\sin\alpha.Mg.1\vec{z} + P.T.\sin\gamma.(-1\vec{z})$

$\Rightarrow T = \frac{P}{2}\frac{.\sin\alpha.Mg}{P.\sin\gamma} = \frac{1}{2}.\frac{\sin 48{,}6°}{\sin 82{,}8°}.50.9{,}81 = 185\ N$ ✓

$\Rightarrow F_{Ax} = 185.\sin 48{,}6 = 139\ N$

$F_{Ay} = 50.9{,}81 - 185.\cos 48{,}6 = 368\ N$

$\Rightarrow |\vec{F_A}| = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{139^2 + 368^2} = 393\ N$ ✓



/10	/10	/10	/10

EXAMEN PHYS-F-110 THEORIE

16 Juin 2017

Nom : **Prénom :**

N° de carte d'étudiant :

Section : chimie / math-physique / math-bio / physique / polyvalente *

Règles de l'examen :

1. Les **GSM et autres moyens de communication électronique (tablette, smartwatch) doivent êtres éteints et laissés** dans les serviettes le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.

2. Les notes et/ou livres ne peuvent être utilisés.

3. Pour la partie théorie, **les calculatrices sont interdites.**

4. Utilisez de l'encre **noire** ou **bleue**, ou un crayon. Le **rouge** est interdit, étant réservé pour la correction.

5. Lisez attentivement les questions **jusqu'au bout**. Si vous ne savez pas répondre à une sous-question, essayez **toutes** les suivantes ; il se peut que vous n'ayez pas besoin d'avoir résolu la question manquée pour y répondre.

6. **Les réponses doivent toutes être justifiées**. Un espace est prévu à cet effet après chaque question. De plus, des feuilles vierges sont disponibles sur demande. Les **unités** doivent être indiquées pour les résultats numériques.

7. L'énoncé comporte **10 pages. La première chose à faire est de vérifier que votre énoncé est complet et d'indiquer votre nom et prénom.** Certaines pages sont laissées intentionnellement pratiquement vierges, pour vous laisser la place de répondre.

Bon courage !

* Barrer les mentions inutiles.

Question 1 (Toutes Sections)
Exemples :
La notation scientifique pour 15 km est $1{,}5 \cdot 10^4$ m.
Le préfixe correspondant à 10^3 est kilo.

1) Écrire en notation scientifique 14 milligrammes :

$1{,}4 \cdot 10^{-5}$ kg

2) Écrire en notation scientifique 777 kilomètres :

$7{,}77 \cdot 10^{5}$ m

3) Écrire le préfixe correspondant à 10^6 :

Mega (M)

4) Écrire le préfixe correspondant à 10^{-6} :

micro (μ)

5) Quel est le nom de la lettre grecque δ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?

delta (minuscule)

6) Quel est le nom de la lettre grecque Γ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?

gamma (majuscule)

7) Écrire la lettre grecque theta minuscule :

θ

8) Écrire la lettre grecque beta minuscule :

β

9) Quel est la taille approximative d'un proton (une erreur d'un facteur 10 est admise)?

10^{-15} m

10) Quelle est la vitesse de la lumière dans le vide ? (Précision attendue : 10%)

299 792 458 m/s

Question 2
(Toutes Sections)

Analyse dimensionnelle.

La fréquence de vibration d'une corde de piano f dépend de la longueur L de la corde, de sa tension T, et de sa masse par unité de longueur λ. Utilisez l'analyse dimensionnelle pour déterminer la dépendance de f en ces grandeurs.

$[\blacktriangle] :=$ unités de $\blacktriangle$

On a que

$$[f] = [L]^{\alpha} [T]^{\beta} [\lambda]^{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow [s]^{-1} = [m]^{\alpha} \left([kg].[m].[s]^{-2}\right)^{\beta} \left([kg][m]^{-1}\right)^{\gamma}$$

Les unités doivent être les mêmes des 2 côtés de l'égalité :

- $[s]$: $-1 = -2.\beta \rightarrow \boxed{\beta = 1/2}$

- $[m]$: $0 = 1.\alpha + 1.\beta - 1.\gamma \rightarrow 0 = \alpha + \frac{1}{2} - \gamma \rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

- $[kg]$: $0 = \beta + 1.\gamma \rightarrow 0 = \frac{1}{2} + \gamma \rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{1}{2}}$

On a donc que :

$$f = \underset{\text{sans unité}}{\text{Constante}} \cdot L^{-1} \cdot T^{1/2} \cdot \lambda^{-1/2}$$

Question 3

(Toutes Sections sauf Math Bio)

Expliquer pourquoi la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente. (Pour information : sur terre à 5500m d'altitude la pression atmosphérique vaut approximativement la moitié de sa valeur au niveau de la mer).

Note : La réponse attendue comprend quelques phrases de texte ; une (ou plusieurs) équation(s) qui résument la situation physique, avec explication des symboles utilisés – vous ne devez pas nécessairement dériver cette/ces équation(s)- ; et éventuellement un schéma.

L'équation d'équilibre hydrostatique :

$\vec{\nabla} P(x;y;z) = \vec{f}_{ext}$ ($\vec{f}_{ext}$ sont les forces extérieures qui s'exercent sur le fluide par unité de volume)

$\Leftrightarrow \vec{\nabla} P(x;y;z) = -\rho g \cdot \vec{u}_z$

La Pression ne dépends que de la hauteur :

$\rightarrow \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P(\not{x};y;z)$; $\frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow P(\not{y};z)$

- $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

A C, la masse volumique dépends de la pression :

Loi des gaz parfaits : $PV = nRT \Leftrightarrow P = \frac{m}{M}\frac{1}{V}RT \Leftrightarrow P = \frac{\rho}{M}RT$

(M : masse molaire de l'air ($\simeq 30.10^{-3}\ \frac{kg}{mol}$))

$\Leftrightarrow \rho = \frac{P.M}{RT}$

- $\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT} \cdot g \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{M}{RT} g\, dz$

- On suppose que la température est constante dans la basse atmosphère.

$\Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P(z=0)}\right) = -\frac{M}{RT} \cdot g \cdot z$

$\frac{P(z)}{P(z=0)} = e^{-\frac{M}{RT} \cdot g z}$: La pression décroit exponentiellement avec l'altitude.

Pour diminuer la pression d'un facteur 2 ($P(z) = \frac{1}{2} P(z=0)$) :

$$\frac{P(z)}{P(z=0)} = \frac{1}{2} = e^{-\frac{M}{RT} g \cdot z}$$

$$\Leftrightarrow -\ln\frac{1}{2} \cdot \frac{RT}{Mg} = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,69 \cdot 8,314 \cdot 273,15}{30 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 5,349 \text{ km}$$

Il faut monter de 5,349 km (cette estimation est très proche de la réalité.

Question 4. Rotation du corps solide. (Toutes Sections)

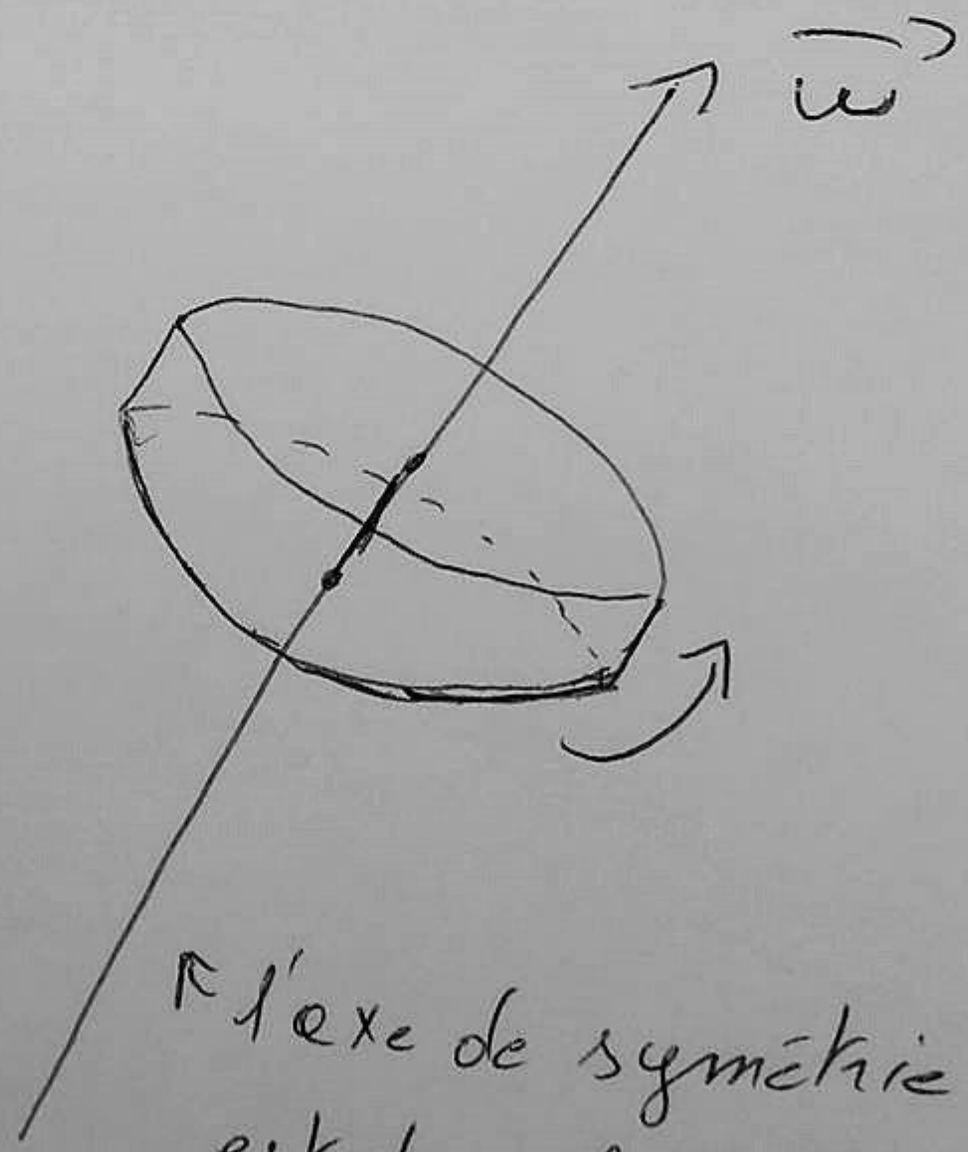
Note : plusieurs des sous-questions ci-dessous ont besoin d'un schéma pour illustrer. Vous pouvez faire un seul schéma –voir question 4.2- sur lequel vous mettrez toutes les informations, ou bien plusieurs schémas).

N'oubliez pas de définir tous les symboles utilisés.

4.1 Enoncez le théorème du moment cinétique.

Voir cours

4.2 Soit un corps solide en rotation autour d'un axe de symétrie. Faites un schéma dans lequel vous dessinerez le solide, son axe de symétrie, son vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.



4.3 Définissez le moment d'inertie I par rapport à son axe de symétrie du solide considéré à la question 4.2.

Voir cours

4.4 Démontrez que pour le cas du solide en rotation autour d'un axe de symétrie, $I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$ ou $\vec{M}$ est le moment des forces externes par rapport à un point situé sur l'axe de rotation (vous utiliserez comme point de départ de votre raisonnement le théorème du moment cinétique énoncé à la question 4.1 et la définition du moment d'inertie donnée à la question 4.3).

Voir cours.

/20	/20	/20	/20

EXAMEN PHYS-F-110 PROBLEMES

16 Juin 2017

Nom : **Prénom :**

N° de carte d'étudiant :

Section : chimie / math-physique / math-bio / physique / polyvalente *

Règles de l'examen :

1. Les **GSM doivent êtres éteints et laissés** dans les serviettes le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.

2. Les notes et/ou livres ne peuvent être utilisés. Vous pouvez disposer d'un aide mémoire consistant en une page A4 recto verso.

3. Vous pouvez utiliser n'importe quel type de calculette; celles-ci ne peuvent être prêtées.

4. Utilisez de l'encre **noire** ou **bleue**, ou un crayon. Le **rouge** est interdit, étant réservé pour la correction.

5. Lisez attentivement les questions **jusqu'au bout**. Si vous ne savez pas répondre à une sous-question, essayez **toutes** les suivantes ; il se peut que vous n'ayez pas besoin d'avoir résolu la question manquée pour y répondre.

6. **Les réponses doivent toutes être justifiées**. Un espace est prévu à cet effet après chaque question. De plus, des feuilles vierges sont disponibles sur demande. Les **unités** doivent être indiquées pour les résultats numériques.

7. Pour les calculs numériques, on prendra $\mathbf{g=9,8\ ms^{-2}}$.

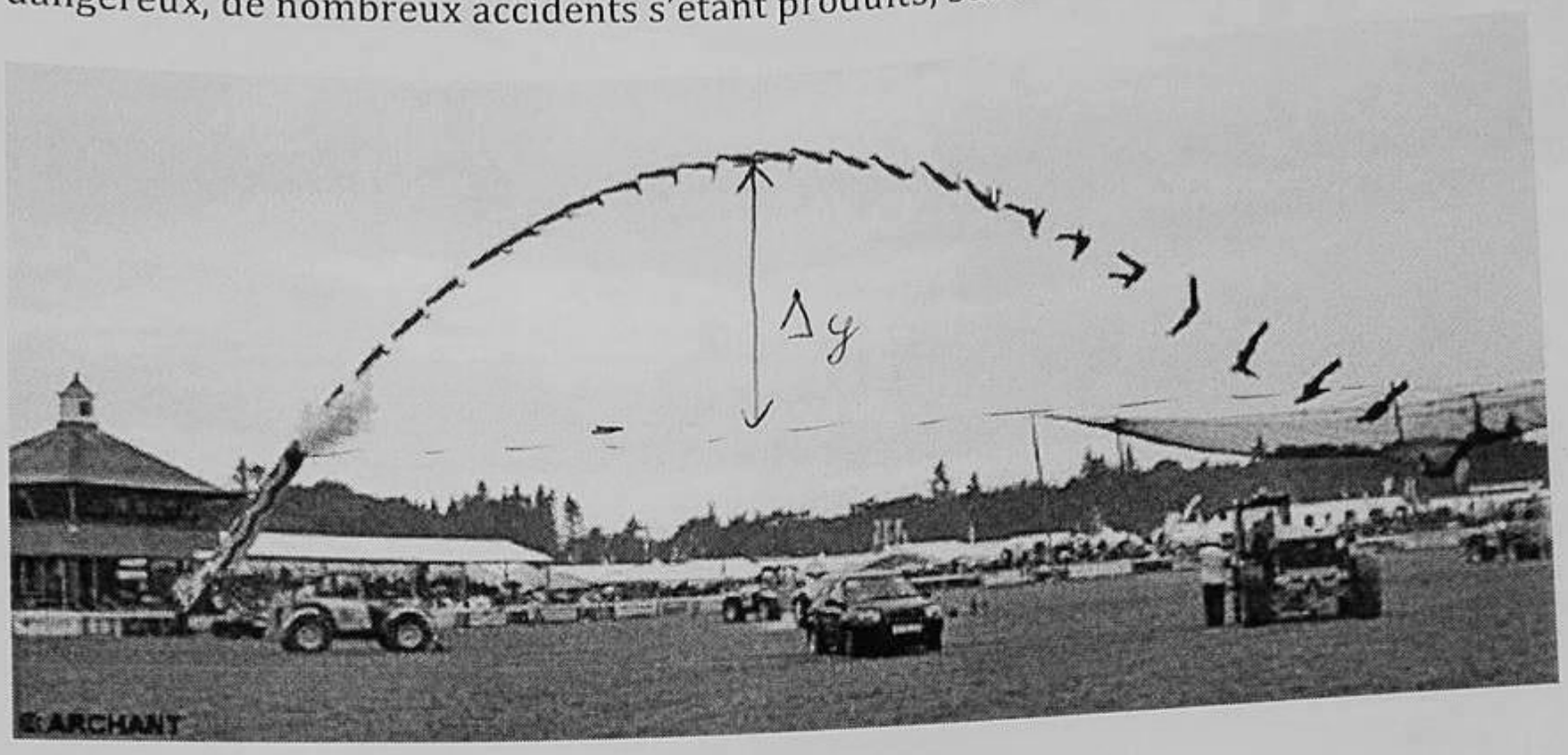
8. L'énoncé comporte **14 pages. La première chose à faire est de vérifier que votre énoncé est complet et d'indiquer votre nom et prénom.** Certaines pages sont laissées intentionnellement pratiquement vierges, pour vous laisser la place de répondre.

Bon courage !

---

* Barrer les mentions inutiles.

Question 1
(Toutes sections).
Le « boulet de canon humain » est un tour de cirque dans lequel un dispositif projette un humain dans l'air. (Notez que ce tour, qui se pratique depuis le 19ème siècle est assez dangereux, de nombreux accidents s'étant produits, surtout lors de l'arrivée au sol).



Sur la photo vous voyez un « boulet de canon humain » en train de voler depuis le « canon » qui le projette et le filet qui va amortir sa chute.

Le Guiness book des records mentionne que la plus grande distance parcourue par un boulet humain est de 59 mètres. Lors de cet exploit, l'humain a atteint une hauteur de 23m. La longueur du canon, c'est-à-dire la distance sur laquelle était accélérée cette personne, était d'approximativement 8m.

1.1) Estimez la vitesse de l'humain à la sortie du canon.

1.2) Estimez l'accélération moyenne de l'humain dans le canon.

(On supposera, comme dans la photo, que le sol est horizontal, et que la sortie du canon et le filet à l'arrivée sont à la même hauteur au-dessus du sol. On négligera le frottement de l'air).

1.1 v_{y0} : Vitesse initiale dans l'axe y.

Équation de mouvement : $\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t$ (1)

MRUA

$v_y(t) = -gt + v_{oy}$ (2)

- On peut résoudre ce système de 2 équations pour trouver la vitesse v_{oy} et t qu'il faut pour monter à y_{max}.

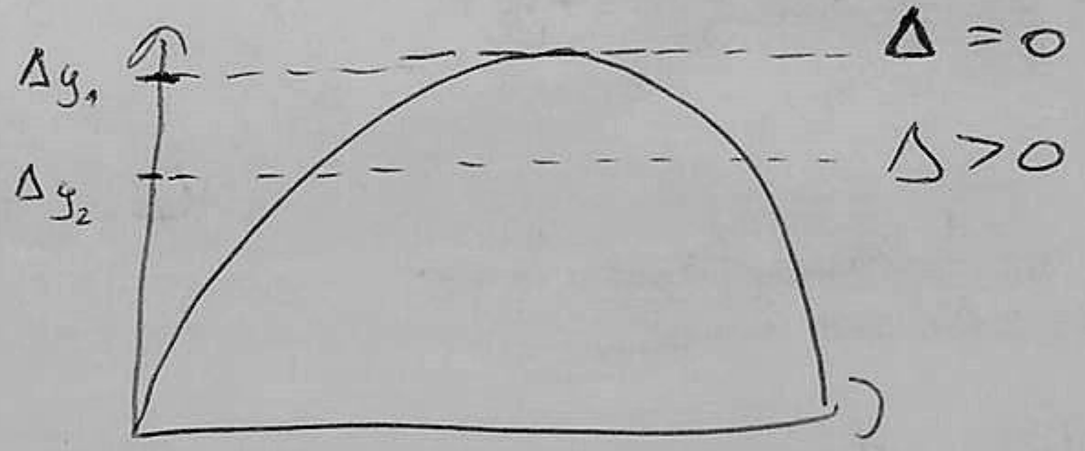
$$\Rightarrow \Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} 9{,}81 t^2 + v_{y0} t - (23 - 8)$$

Calculons le Δ de ce polynôme

$$\Delta = v_{y0}^2 - \frac{4}{2} 9{,}81 . 15$$

- Astuce, si on fixe $\Delta = 0$, le polynome aura une Racine cette solution correspondra au fait que Δy a atteint la hauteur maximale. Si $\Delta > 0$, il y a 2 Racines qui correspondent au fait qu'on franchit 2 fois le Δy fixé : une fois en montant, une fois en descendant.



$$\Rightarrow \Delta = 0 = v_{y0}^2 - 30 . 9{,}81 \Rightarrow v_{y0} = \sqrt{30 . 9{,}81} = 17{,}2 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_y(t) = v_{y0} - g . t \rightarrow t = \frac{v_{y0}}{g} = 1{,}75 \text{ s}$$

$v_y(t) = 0$ (au sommet)

- On pourrait aussi ne pas mettre de condition sur Δ, trouver les Racines du polynôme, les remplacer dans l'équation (2) en mettant $v_y(t) = 0$ et on trouverait les mêmes solutions.

V_{0x} : Equations MRU : $\Delta x = V_{0x} \cdot t_{vol}$

$$V_x(t) = V_{0x}$$

t_{vol} correspond au temps de montée et descente

$$\Rightarrow t_{vol} = 2 \cdot t_{montée} = 2 \cdot 1,75 = 3,5 \text{ s}.$$

$\rightarrow$ $V_{0x} = \frac{\Delta x}{t_{vol}} = \frac{59}{3,5}$

Δx 59

$$V_{0x} = \frac{\Delta x}{t_{vol}} = \frac{59}{3,5} = 16,86 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow |V_{sortie}| = \sqrt{|V_{0x}|^2 + |V_{0y}|^2} = 24,06 \text{ m/s}$$

1.2| $L = \frac{1}{2} a_{moy} t^2 + \underbrace{V_0}_{=0} t$; $V_{sortie} = a_{moy} \cdot t + \underbrace{V_0}_{=0}$

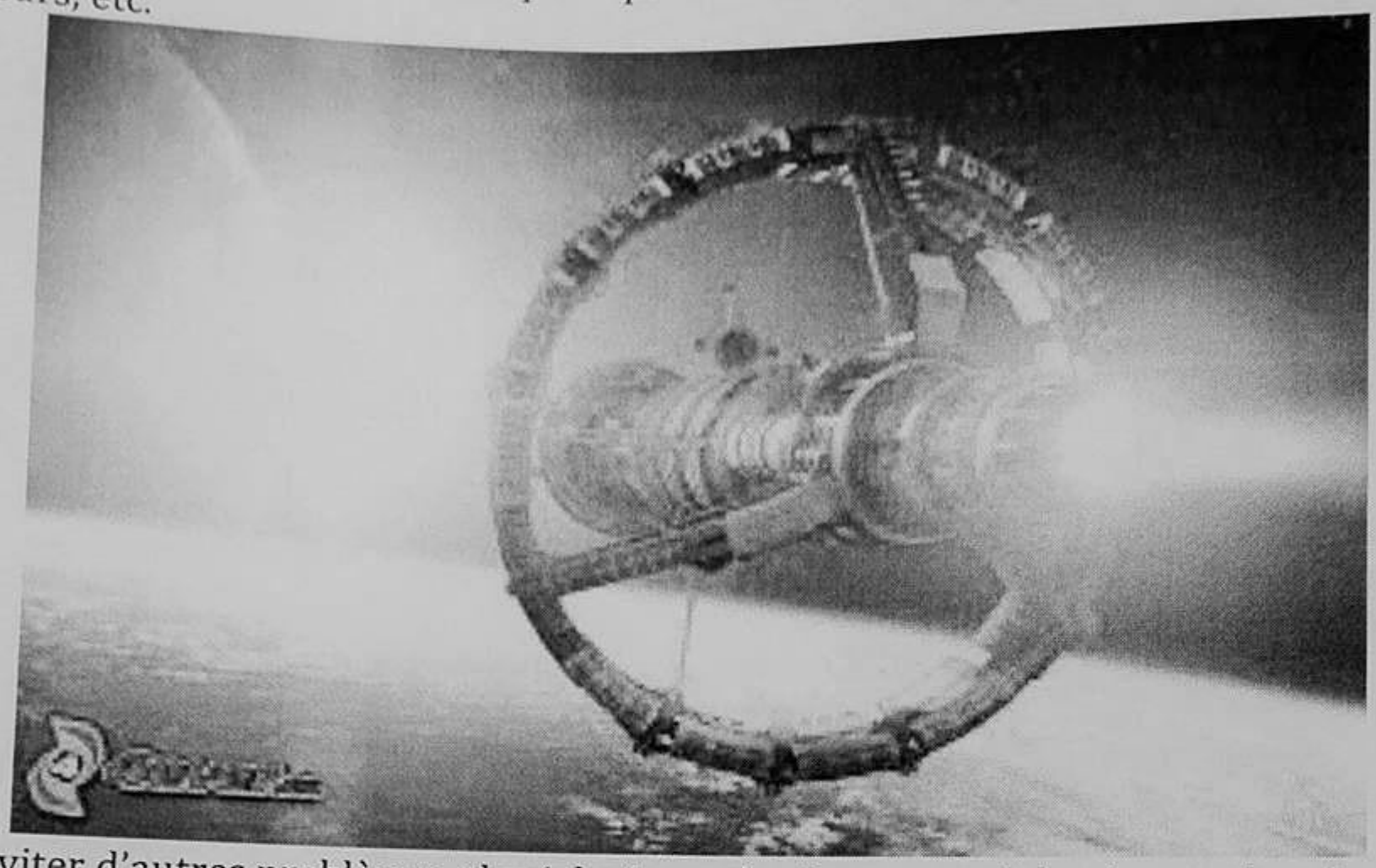
$\Rightarrow L = \frac{1}{2} a_{moy} \left(\frac{V_{sortie}}{a_{moy}}\right)^2 + 0$ $\quad t = \frac{V_{sortie}}{a_{moy}}$

$$\frac{2L}{V_{sortie}^2} = \frac{1}{a_{moy}}$$

$$a_{moy} = \frac{V_{sortie}^2}{2L} = \frac{24^2}{2.8} = 36 \frac{m}{s^2} \sim 3,7 \text{ g}$$

Question 2. (Toutes Sections)

Lors de longs voyages dans l'espace, l'absence de pesanteur a des effets néfastes sur le corps humain.
Pour lutter contre ces effets, on aimerait pouvoir créer, à bord d'un vaisseau spatial, une "gravité artificielle".
Pour ce faire, on pourrait créer un vaisseau spatial qui comprendrait un anneau en rotation autour de l'axe longitudinal du vaisseau. Cet axe longitudinal serait, lui, orienté dans le sens du déplacement du vaisseau (voir figure ci-dessous). Les humains vivraient dans l'anneau en rotation, tandis que la partie centrale comprendrait les machines, moteurs, etc.



Pour éviter d'autres problèmes physiologiques, la vitesse angulaire de rotation de l'anneau autour de l'axe longitudinal ne peut cependant pas dépasser deux tours par minute.

2.1) En tenant compte de la contrainte sur la vitesse angulaire de rotation, quelle doit être la longueur minimale du rayon de l'anneau pour créer, dans l'anneau, une accélération égale à celle de l'accélération due à la force de gravitation terrestre ? (Prenez $g=9{,}80\ m/s^2$)

2.2) À l'approche de la planète Mars, on souhaite habituer les occupants du vaisseau à l'accélération due à la force de pesanteur de la planète rouge. En considérant la longueur minimale du rayon trouvée en a), quelle doit être la vitesse angulaire de rotation de l'anneau pour créer, dans l'anneau, l'accélération souhaitée ? (Rayon de Mars = 3393 km ; Masse de Mars = $6{,}42.10^{23}$ kg ; constante de gravitation universelle = $6{,}67\cdot 10^{-11}\ kg^{-1}\cdot m^3\cdot s^{-2}$).

2.1) $a = \omega^2 . R$

$R = \frac{a}{\omega^2} = \frac{9{,}8}{(2\pi.\frac{2}{60})^2} = 223\ m$

↳ $\omega = 2\pi . f$

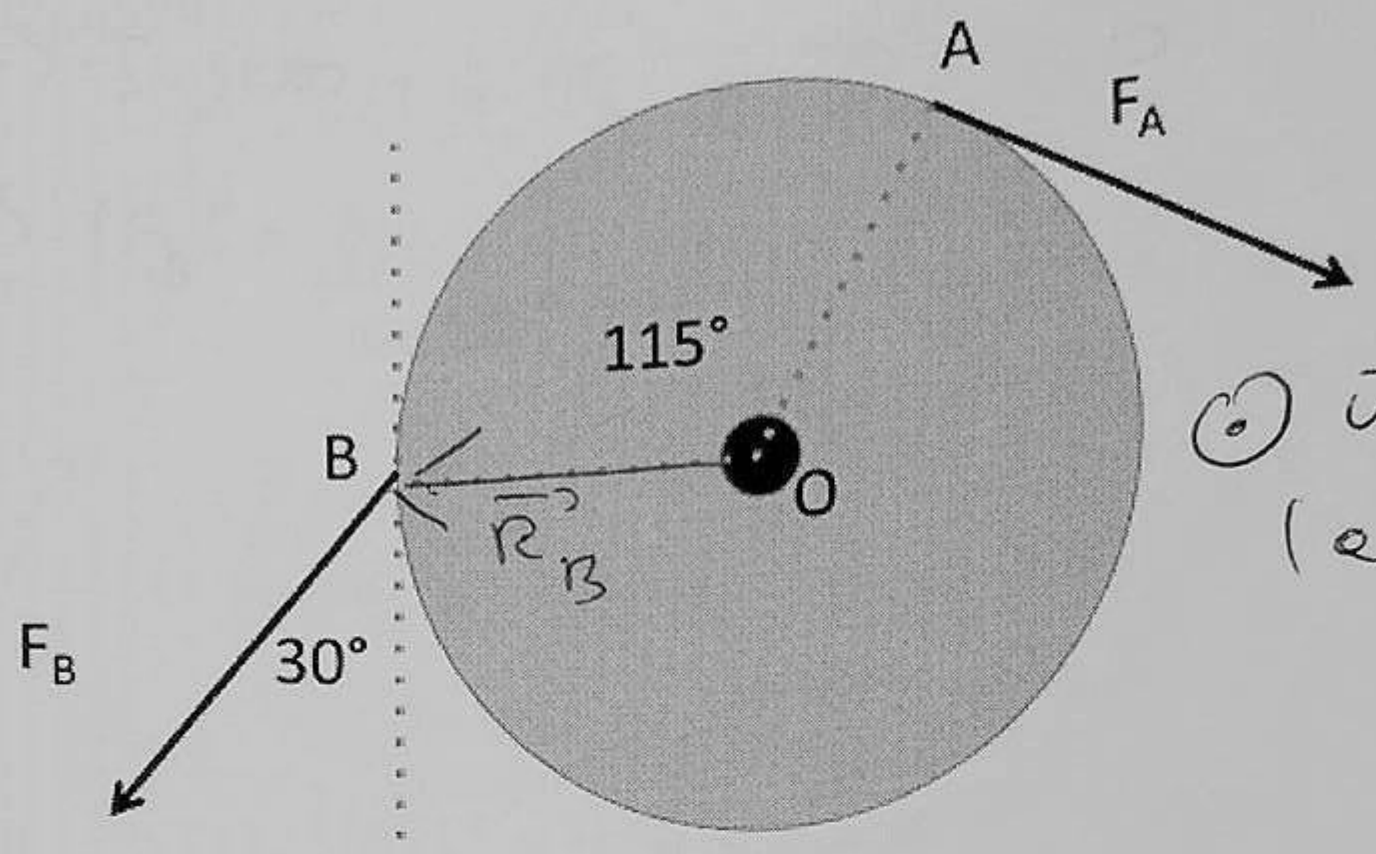
$$a_{gravitation} = G \cdot \frac{M_{mars}}{R^2_{mars}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6{,}42 \cdot 10^{23}}{(3393 \cdot 10^3)^2}$$

$$= 3{,}72 \ \frac{m}{s^2}$$

$$a = \omega^2 \cdot R$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a}{R}} = \sqrt{\frac{3{,}72}{223}} = 0{,}129 \ \frac{Rad}{s} \simeq 1{,}23 \ \frac{tours}{min}$$

Question 3
(Toutes sections)



$\odot$ $\vec{v_2}$
(axe sortant de la feuille)

Un manège de rayon 5m est libre de tourner autour de son axe noté O (voir schéma). Deux enfants se disputent et veulent faire tourner le manège dans des directions opposées. Le premier enfant applique une force F_A au point A, tangentiellement au manège. La norme de F_A est de 500N. Le second enfant applique une force F_B au point B. La force F_B forme un angle de 30° avec la tangente au manège. L'angle AOB vaut 115°. Le manège est immobile.

Quelle est la norme de la force F_B ?

Pour que le manège ne tourne pas, il faut que la somme des moments de force soit nulle :

$$\vec{M}_{F_A} + \vec{M}_{F_B} = 0$$

Or $\vec{M}_{F_A} = \vec{R}_A \times \vec{F}_A = 5\,m \cdot 500\,N \cdot (-\vec{v_2})$ → se détermine avec la règle de la main droite

$\vec{M}_{F_B} = \vec{R}_B \times \vec{F}_B = 5\,m \cdot (|F_B| \cdot \cos 30°) \cdot \vec{v_2}$

↳ seule la composante orthogonale à $\vec{R}_B$ compte

Donc $\vec{M}_{F_A} + \vec{M}_{F_B} = 0$

$\Leftrightarrow -5 \cdot 500 + 5 \cdot (|F_B| \cdot \cos 30°) = 0$

$\Leftrightarrow |F_B| = \frac{500}{\cos 30°}$

Question 4
(Toutes sections)
Une barre de fer de faible section et de longueur 2m a une masse linéique dont la dépendance en la position peut être approximée par l'expression :

$\lambda(x) = a + bx + cx^2$ pour $0 \leq x \leq 2m$

avec a=0,1 kg·m^{-1} , b=-0,05 kg·m^{-2} , c=0,06 kg·m^{-3}
(Notez la valeur négative du coefficient b).

4.1 Une masse linéique ne peut jamais être négative. Montrez que $\lambda(x)$ est positive pour $0 \leq x \leq 2m$.

4.2 Quelle est la masse de la barre ?

4.3 Quelle est la position x_{CM} du centre de masse de la barre ?

4.1 Il suffit de montrer que les 2 racines du polynôme se trouvent toutes les 2 à droite ou à gauche du segment [0,2].

- $\lambda(x) = 0,1 - 0,05x + 0,06x^2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,05^2 - 4(0,1)(0,06)} = \sqrt{-0,0215}$

avec un Δ négatif, il n'y a pas de racines et $\lambda(x)$ est toujours positif

4.2 $M = \int_0^2 \lambda(x)\,dx$

$= \int_0^2 (0,1 - 0,05x + 0,06x^2)\,dx$

$= \left[0,1x - 0,05\frac{x^2}{2} + 0,06\frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= 0,1.2 - 0,05.2 + 0,06.\frac{8}{3}$

$= 0,26$ kg

NOM, PRENOM (en majuscules) ….……...…….……

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 21 juin 2017

I. Théorie (20 points – 1 heure 15')

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Note théorie : /20

Toutes les sections

1. Définissez, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez :
a) résistivité électrique
b) inductance d'un élément de circuit électrique
c) différence de potentiel électrostatique entre le point A et le point B
d) susceptibilité magnétique d'un matériau
(4 points)

voir cours.

Toutes les sections

2. Enoncez la loi d'Ampère-Maxwell (celle dans laquelle intervient le courant de déplacement), en précisant toutes les grandeurs et concepts que vous introduisez.
(3 points)

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \left(\sum I_i + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E}.\vec{dS} \right)$$

où :

$\oint_C \vec{B}.\vec{dl}$ est la circulation du champ magnétique sur un contour fermé C

μ_0 est la perméabilité du vide

$\sum I_i$ est la somme algébrique des courants encerclés par C

ϵ_0 est la permittivité du vide

$\oint_S \vec{E}.\vec{dS}$ est le flux du champ électrique à travers la surface S délimitée par C

et *d/dt* est la dérivée par rapport au temps

Toutes les sections

3. A une distance *d* d'un très long fil rectiligne uniformément chargé, on mesure un champ électrique radial d'intensité *E*. Etablissez l'expression de la densité linéique de charge sur le fil en fonction de *d* et de *E*, en utilisant la loi de Gauss. Définissez toutes les grandeurs que vous introduisez.
(4 points)

Loi de Gauss :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}$$

où Q est la charge enfermée dans la surface de Gauss et ϵ est la permittivité du milieu.

Choix de la surface de Gauss qui exploite la symétrie du champ : on prend un cylindre dont l'axe est sur le fil, de rayon d et de hauteur h.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi d h$$

et la charge enfermée $Q = \lambda h$, où λ est la charge linéique.

Donc :

$$\lambda = \epsilon 2\pi d E$$

Toutes les sections

4. Un générateur de tension alternative sinusoïdale est constitué d'un cadre de surface *S* autour duquel un fil conducteur est enroulé en *N* spires serrées. Le cadre tourne avec une vitesse angulaire constante dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à l'axe de rotation du cadre. Etablissez l'expression de l'amplitude de la tension induite, en précisant chaque grandeur que vous introduisez.
(3 points)

Soit *B* l'intensité du champ magnétique, et $\alpha(t)=\omega t$ l'angle entre le champ magnétique et le vecteur normal à la surface du cadre, où ω est la vitesse angulaire du cadre.

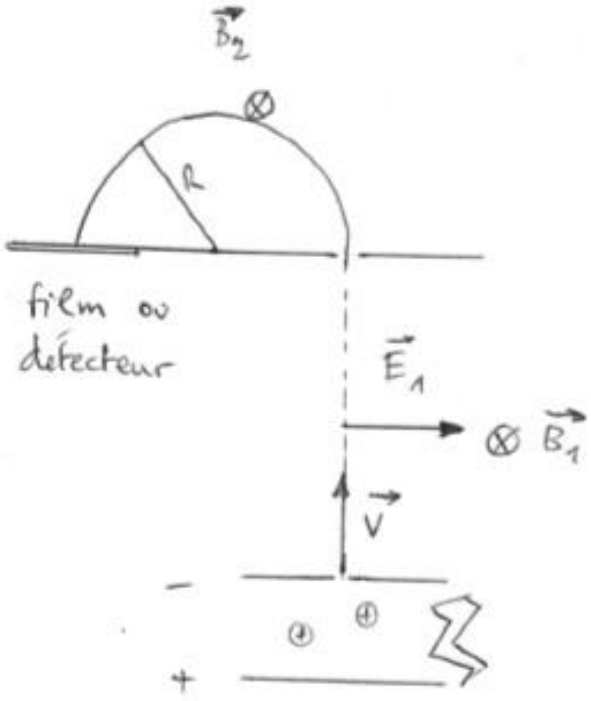
L'expression du flux du champ magnétique à travers 1 spire en fonction du temps est :
$\varphi_B = BS\cos(\omega t)$

Par la loi de l'induction, la f.é.m. aux bornes de cette spire a pour expression :
$$\epsilon = \frac{-d\varphi_B}{dt} = BS\,\omega\sin(\omega t)$$

Comme les *N* spires sont toutes en série, l'amplitude ϵ_0 de la f.é.m. aux bornes de la bobine a pour expression $\epsilon_0 = NBS\,\omega$

Sections Chimie et Polyvalente

5. Expliquez le principe de fonctionnement du spectromètre de masse à partir des lois qui décrivent les forces électrique et magnétique.
(4 points)



Le spectromètre de masse comporte :

- une source d'ions des différents composants du matériau à analyser ;
- une d.d.p. accélératrice qui produit un faisceau d'ions de masses et de vitesses différentes ;
- un sélecteur de vitesse, avec un champ magnétique $\vec{B}_1$ perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$ des ions, et un champ électrique $\vec{E}_1$ perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{B}_1$ (voir la figure). Seuls les ions dont la vitesse est telle que la force totale $\vec{F} = q\vec{E}_1 + q\vec{v}\times\vec{B}_1$ est nulle poursuivent en ligne droite, soit ceux dont la norme de la vitesse vaut $v = \dfrac{E_1}{B_1}$;

• un séparateur avec seulement un champ magnétique $\vec{B}_2$ perpendiculaire à $\vec{v}$. Dans ce champ, les ions soumis à une force centripète d'intensité qvB_2 décrivent une trajectoire circulaire dont le rayon se calcule par $qvB_2 = m\dfrac{v^2}{R}$, soit : $R = m\dfrac{v}{qB_2}$. Le rayon est donc proportionnel à la masse de l'ion, et celui-ci est alors détecté à un endroit bien spécifique dépendant de sa masse.

Sections Chimie et Polyvalente

6. Etablissez l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans une capacité *C* quand elle est complètement chargée sous une différence de potentiel *V*.
(2 points)

On charge progressivement la capacité en amenant des charges élémentaires *dq* de l'armature négative à l'armature positive.

Quand la capacité est partiellement chargée avec une charge *q*, la tension *V(q)* entre les bornes vaut $V(q)=\frac{q}{C}$.

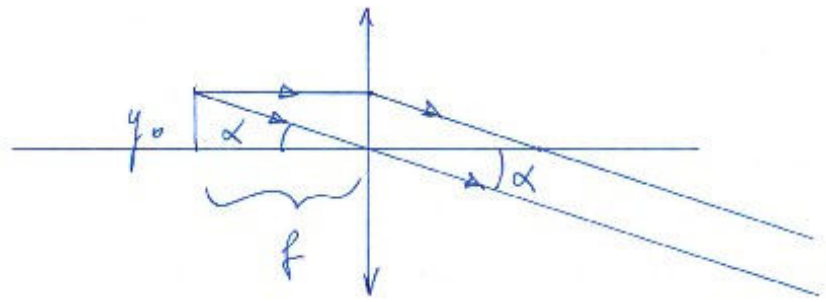
Le travail pour amener une charge supplémentaire *dq* est : $dW=V(q)dq=\frac{q}{C}dq$.

Le travail total pour charger la capacité est : $W=\int_0^Q \frac{q}{C}dq=\frac{Q^2}{2C}$

Or $Q=C.V$ donc $W=\frac{CV^2}{2}$

Sections Mathématique et Physique

7. Etablissez la formule du grossissement angulaire qu'on obtient avec une loupe lorsqu'on regarde l'objet à travers la loupe avec un oeil au repos.
(3 points)



La loupe est une lentille convergente.

Oeil au repos → les rayons qui entrent dans l'oeil sont parallèles (ils proviennent d'un point à l'infini) → l'image de l'objet par la loupe est une image virtuelle à l'infini → l'objet est au foyer objet de la loupe.

Angle sous lequel l'objet est vu à travers la loupe : $\alpha = \frac{y_o}{f}$, où y_o est la taille de l'objet et f est la distance focale de la loupe.

On compare cet angle au meilleur angle possible à l'oeil nu, càd avec l'objet au point proche :

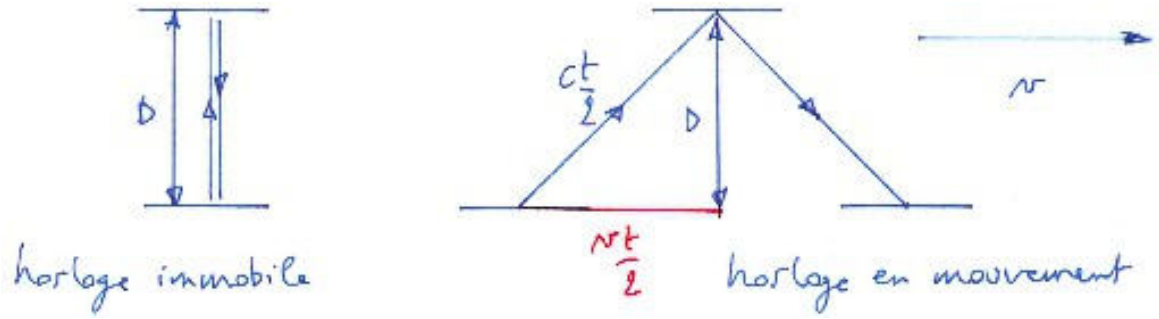
$\alpha_{pp} = \frac{y_o}{N}$, où N est la distance conventionnelle du point proche, 25 cm.

Donc le grossissement angulaire :

$$M = \frac{\alpha}{\alpha_{pp}} = \frac{N}{f}$$

Sections Mathématique et Physique

8. Etablissez la formule de la dilatation des intervalles de temps à partir de l'expérience de pensée de l'horloge lumineuse. Précisez, pour chaque calcul, le référentiel dans lequel vous vous placez.
(3 points)



L'observateur observe deux horloges lumineuses identiques (voir schéma), l'une immobile p/r à lui, et l'autre qui s'éloigne à vitesse *v*. Toutes les durées sont celles perçues par l'observateur, donc tous les calculs sont faits dans le référentiel de l'observateur.

Pour ce dernier, le temps que met la lumière pour 1 aller-retour dans l'horloge immobile est :

$$t_0 = \frac{2D}{c}$$

Le temps que met la lumière pour 1 aller-retour dans l'horloge en mouvement se calcule comme suit. Par Pythagore, pour la moitié du trajet parcourue en un temps $t/2$, on a :

$$c^2\frac{t^2}{2} = D^2 + v^2\frac{t^2}{2} \quad .$$

En isolant *t* on trouve : $t = \dfrac{2D}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

D'où l'expression de la dilatation des intervalles de temps :

$t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma t_0$, où on définit le facteur de dilatation du temps $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

NOM, PRENOM (en majuscules) ..……...……..……

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 21 juin 2017

II. Exercices (20 points – 2 heures)

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Q : **1** */4* **2** */4* **3** */4* **4 ou 6** */4* **5 ou 7** */4*

Note totale exercices : **/20**

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2017-2018 - Examen de janvier 2018

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **4 feuilles** (2 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous n'avez pas droit à un aide-mémoire ou à une calculatrice.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
9. L'examen dure **1h15 (75 minutes)**.

Bon travail !

Q1	Q2
/15	/8

1. (Toutes sections — 15 points) : Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel. On considère un système $\mathscr{S}$ de N points matériels de masses m_i placés aux points A_i, $1 \leq i \leq N$. Les vitesses des points A_i dans $\mathcal{R}$ pourront être notées $\vec{v}_i$.

a) Rappeler les définitions de l'impulsion (ou quantité de mouvement) totale $\vec{P}$, du moment cinétique total $\vec{\sigma}(O)$ par rapport à un point O quelconque et de l'énergie cinétique totale E_{c} du système $\mathscr{S}$.

b) Rappeler la définition du centre de masse G du système $\mathscr{S}$.

c) Rappeler la définition du référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ pour le système $\mathscr{S}$.

d) Montrer que l'impulsion totale $\vec{P}^*$ du système $\mathscr{S}$ dans $\mathcal{R}^*$ est nulle.

e) Trouver la relation reliant $\vec{\sigma}(O)$, $\vec{\sigma}(O')$ et $\vec{P}$, où O et O' sont deux points distincts quelconques. Que donne cette relation lorsqu'elle est appliquée dans le référentiel $\mathcal{R}^*$? Qu'est-ce que le moment cinétique propre du système $\mathscr{S}$?

f) Énoncer et démontrer le théorème de Koenig pour le moment cinétique (c'est-à-dire le premier théorème de Koenig) pour le système $\mathscr{S}$. On définira chaque terme dans la formule du théorème et on justifiera soigneusement chaque étape de la démonstration.

g) Énoncer, sans démonstration ni calcul, le théorème du moment cinétique dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$ par rapport à un point O fixe.

2. (Toutes sections sauf Math-Bio — 8 points) :

a) Rappelez la condition d'équilibre hydrostatique pour un fluide à la surface de la Terre (en définissant soigneusement chaque symbole employé).

b) En faire la démonstration en considérant le bilan des forces sur un parallélépipède de fluide au repos à la surface de la Terre.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Exercices

Année 2017-2018 - Examen de janvier 2018

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **5 feuilles** (4 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
7. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
8. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
9. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
10. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Vitesse du son dans l'air : $v_{\text{air}} = 340\,\text{m/s}$;
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$;
    - Constante de Newton : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2$.
11. L'examen dure **2h00 (120 minutes)**.

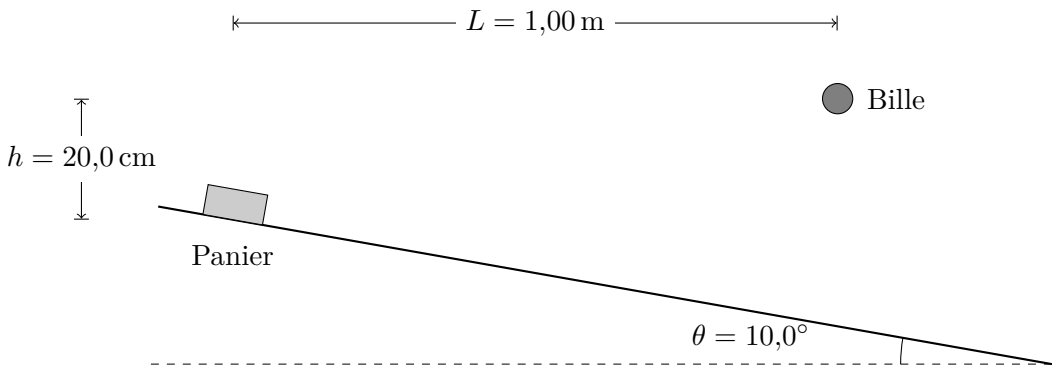
Bon travail !

Correctif

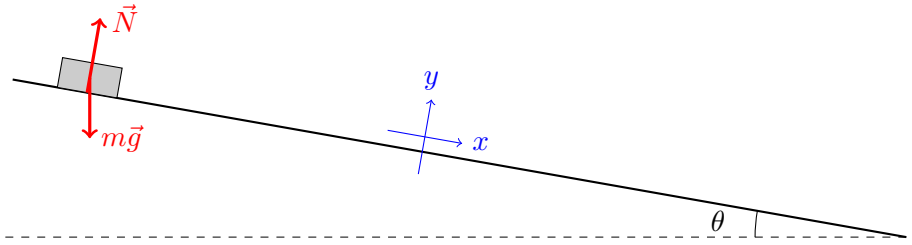
Q1	Q2	Q3	Q4
/7	/5	/6	/4

Correctif rédigé par Nicolas : Nicolas.Postiau@ulb.ac.be

1. (Toutes sections — 7 points) : Un panier se trouve au sommet d'un plan incliné formant un angle θ avec l'horizontale. À l'instant $t = 0$, on lâche le panier. On supposera que la panier glisse sur la pente sans frottement. À quel instant t_0 faut-il lâcher une bille se trouvant à une hauteur h au-dessus de la position initiale du panier et à une distance horizontale L de la position initiale du panier, pour que la bille atterrisse exactement dans le panier lors de son passage ? On négligera les dimensions du panier et de la bille.
Application numérique : calculer t_0 pour $\theta = 10{,}0°$; $h = 20{,}0\,\text{cm}$; $L = 1{,}00\,\text{m}$.



Réponse : *On veut trouver le temps qu'il faut attendre pour lâcher la bille afin que les deux objets arrivent en même temps au même point : pour ce faire, on va calculer le temps nécessaire au panier et à la bille pour arriver à ce point (le bas de la pente) et faire la différence de ces deux temps.*
Commençons par étudier le mouvement du panier. Les forces et le système d'axes sont indiqués dans le schéma ci-dessous.



La relation fondamentale de la dynamique pour le panier s'exprime comme :

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Après projection sur l'axe x, cela donne :

$$0 + mg\sin\theta = ma \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\theta.$$

Le mouvement ayant lieu uniquement suivant l'axe x, on n'a pas besoin d'écrire la projection sur l'axe y.
Puisque cette accélération est constante, le mouvement est un MRUA d'accélération $a = g\sin\theta$. L'équation du mouvement est donc :

$$x(t) = a\frac{t^2}{2} = g\sin\theta \cdot \frac{t^2}{2}. \tag{1}$$

Trouvons la distance totale parcourue par le panier : si on appelle cette distance d, on a par trigonométrie :

$$\cos\theta = \frac{L}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{\cos\theta}.$$

Pour trouver le temps t_p mis par le panier pour descendre la pente, il suffit d'écrire l'équation (1) pour $x = d$ et d'isoler le temps :

$$\frac{L}{\cos\theta} = g\sin\theta \cdot \frac{t_p^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_p^2 = \frac{2L}{g\sin\theta\,\cos\theta}$$
$$\Rightarrow \quad t_p = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta\,\cos\theta}} = 1{,}092\,\text{s}.$$

Étudions à présent le mouvement de la bille : il s'agit d'une chute libre. Son équation du mouvement sur un axe vertical orienté vers le haut et dont l'origine est au niveau du sol est donc donnée par :

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

La hauteur initiale, qui est la distance verticale à parcourir, peut s'obtenir également par trigonométrie en utilisant le même triangle rectangle que précédemment :

$$y_0 = h + L\tan\theta.$$

On recherche le temps t_b pour que la bille arrive en bas de la pente, en $y = 0$:

$$0 = h + L\tan\theta - \frac{gt_b^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{gt_b^2}{2} = h + L\tan\theta$$
$$\Rightarrow \quad t_b = \sqrt{\frac{2}{g}(h + L\tan\theta)} = 0{,}277\,\text{s}.$$

Le temps d'attente requis pour que les deux objets se croisent est donc donné par la différence de ces deux temps :

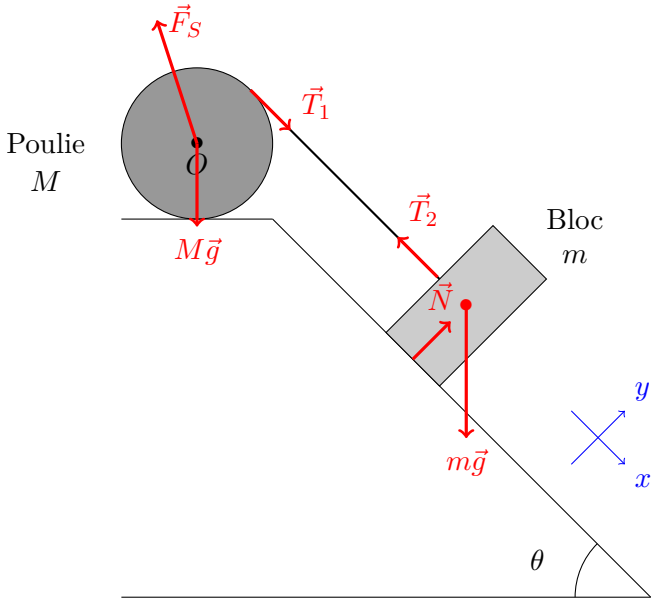
$$t_0 = t_p - t_b = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta\,\cos\theta}} - \sqrt{\frac{2}{g}(h + L\tan\theta)} = \boxed{0{,}815\,\text{s}}.$$

2. (Toutes sections — 5 points) : Un bloc de masse m peut glisser vers le bas d'un plan incliné d'un angle θ, sans frottement. Il est relié à une poulie de masse M et de rayon R par un fil (inextensible et de masse négligeable). On assimile la poulie à un disque dont le moment d'inertie est $I = \frac{1}{2}MR^2$.

a) Déterminer l'accélération angulaire de la poulie.

b) Déterminer le module de la vitesse du bloc lorsqu'il a glissé d'une distance D à partir du repos.

Application numérique : Calculer les réponses aux questions a) et b) pour :
$m = 2{,}00\,\text{kg}$; $M = 4{,}00\,\text{kg}$; $R = 0{,}50\,\text{m}$; $D = 1{,}00\,\text{m}$; $\theta = 53{,}0°$.



Réponse : *Les forces et le système d'axes ont été indiquées sur le schéma. Les forces $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ sont les tensions dans la corde (égales et opposées), $m\vec{g}$ et $M\vec{g}$ sont les poids de la poulie et du bloc, $\vec{N}$ est la normale à la surface (qui s'exerce sur le bloc), et $\vec{F}_S$ est la force extérieure qui doit s'exercer sur la poulie pour que celle-ci reste en place.*

a) Regardons la somme des moments de force qui s'exercent sur la poulie : on a que

$$I\vec{\gamma} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O,$$

où I est le moment d'inertie de la poulie : $I = \frac{1}{2}MR^2$. Il faut donc calculer le moment de chacune des 3 forces s'exerçant sur la poulie, par rapport au point O. Le moment des forces $M\vec{g}$ et $\vec{F}_S$ vaut $\vec{0}$ car ces forces s'exercent sur le point O. Il reste donc uniquement le moment de la force $\vec{T}_1$:

$$\vec{\mathcal{M}}_{T_1,O} = \vec{r} \times \vec{T}_1 = RT_1\,(-\vec{u}_z) \quad \Rightarrow \quad \left|\sum \vec{\mathcal{M}}_O\right| = RT.$$

En effet, le vecteur position ($\vec{r}$) est de norme R et est dirigé du point O au point d'application de $\vec{T}_1$. Puisque la tension est la même partout dans une corde, on a utilisé la notation $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1\right| \equiv T$.
On a donc :

$$\gamma = \frac{RT}{I} = \frac{2RT}{MR^2} = \frac{2T}{MR}.$$

Cependant, on ne connaît pas T. Pour le déterminer, il nous faut considérer l'autre système du problème : le bloc, qui est en mouvement selon l'axe x :

$$\vec{T}_2 + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

En projetant cette équation sur l'axe x, on a (sachant que l'accélération est dirigée dans le sens des x positifs) :

$$-T + 0 + mg\sin\theta = ma.$$

D'autre part, l'accélération angulaire de la poulie est reliée à l'accélération du bloc :

$$\gamma = \frac{a}{R}$$

car la corde, qui est reliée à la poulie, a la même accélération que le bloc. En combinant les résultats obtenus, on obtient :

$$\begin{aligned} & \gamma = \frac{2T}{MR} = \frac{2m}{MR}(g\sin\theta - \gamma R) \\ \Rightarrow \quad & \gamma\left(1 + 2\frac{m}{M}\right) = \frac{2m}{MR}\sin\theta \\ \Rightarrow \quad & \gamma = \frac{2m}{M+2m} \cdot \sin\theta \cdot \frac{g}{R} = \boxed{7{,}83\,\mathrm{rad/s^2}}. \end{aligned}$$

b) Du résultat précédent, on trouve directement l'accélération :

$$a = \gamma R = \frac{2m}{M+2m}\sin\theta\, g.$$

Comme cette accélération est constante, le bloc suit un MRUA. À partir de l'expression pour la position en fonction du temps et pour la vitesse en fonction du temps, on peut exprimer la vitesse en fonction de la position et calculer la grandeur recherchée :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{at^2}{2} \\ v = at \end{array} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} \right\} \quad & \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2} \cdot \frac{v^2}{a^2} \\ & \Rightarrow \quad x = \frac{v^2}{2a} \\ & \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ax}. \end{aligned}$$

Après avoir parcouru une distance D, le bloc aura donc une vitesse

$$v_D = \sqrt{\frac{4m}{M+2m}\sin\theta\, g \cdot D} = \boxed{2{,}80\,\mathrm{m/s}}.$$

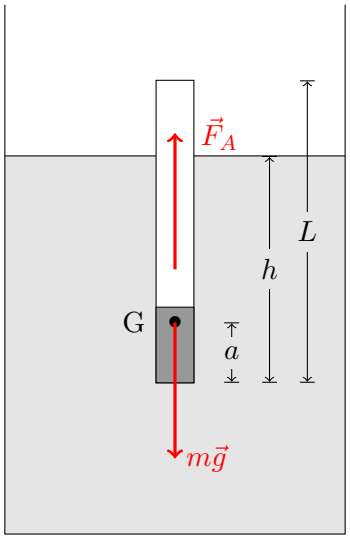
3. (Toutes sections sauf Math-Bio — 6 points) : Un densimètre est un appareil permettant de mesurer la densité. Soit un densimètre destiné à mesurer la densité de liquides et constitué d'un cylindre creux (longueur $L = 400\,\text{mm}$, rayon r) à l'intérieur duquel se trouve une masse de plomb fixée à la base inférieure du cylindre. Le centre de masse G du densimètre est situé à la hauteur $a = 10\,\text{mm}$ de la base inférieure du cylindre.

Le densimètre flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ à déterminer. Il est immergé jusqu'à une hauteur h. Cette hauteur vaut $h_0 = 200\,\text{mm}$ lorsque le densimètre est placé dans de l'eau (de masse volumique $\rho_0 = 1\,000\,\text{kg/m}^3$).

a) Quelle est la masse volumique du liquide si le densimètre est immergé jusqu'à une hauteur $h = 250\,\text{mm}$?

b) Quelle masse volumique minimale ρ_{min} peut-on mesurer avec ce densimètre ?

c) A partir d'une certaine masse volumique ρ_{max}, le densimètre ne peut plus être en équilibre stable. Que vaut ρ_{max} ? (on supposera que r, le rayon du cylindre, est négligeable).



Réponse : *Les forces ont été indiquées sur le schéma : on a uniquement le poids $m\vec{g}$, et la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$.*

a) Puisque le système est en équilibre, la somme des forces doit être nulle :

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad mg = F_A = \rho g h \cdot \pi r^2.$$

En effet, le volume d'eau déplacé est un cylindre de hauteur h et de rayon r.
On cherche à connaître ρ. L'équation ci-dessus ne suffit pas puisqu'on ne connaît ni m ni r. On connaît cependant la hauteur h_0 pour un liquide dont on connaît la masse volumique (l'eau), et on peut réécrire la même équation dans l'eau :

$$mg = \rho_0 g h_0 \cdot \pi r^2.$$

En combinant les deux équations que nous avons obtenues, on trouve :

$$\rho g h \cdot \pi r^2 = \rho_0 g h_0 \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \cdot \frac{h_0}{h} = \boxed{800\,\text{kg/m}^3}.$$

b) La masse volumique minimale correspond au cas limite où le cylindre est complètement immergé, autrement dit au cas où $h = L$. Dans cette situation, l'équation précédente se réécrit comme :

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{h_0}{L} = \boxed{500\,\text{kg/m}^3}.$$

c) Si ρ est trop grand, le centre de poussée *(≡ centre de masse du liquide déplacé) peut passer sous le centre de masse du densimètre, ce qui cause une situation d'équilibre instable. Le centre de poussée se situe en $\frac{h}{2}$. On a donc équilibre instable si $\frac{h}{2} < a$ (puisque a est la hauteur du centre de masse). Puisque $h = h_0 \cdot \frac{\rho_0}{\rho}$, on a donc équilibre instable si :*

$$\frac{h_0}{2} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} < a \quad \Rightarrow \quad \rho > \rho_{max} = \rho_0 \cdot \frac{h_0}{2a} = \boxed{10\,000\,\mathrm{kg/m^3}}.$$

4. (Uniquement Math-Ph et Physique — 4 points) : Une voiture s'approche d'un grand mur à la vitesse de 30 km/h. Elle émet un son de fréquence 500 Hz. Un observateur immobile, situé sur l'axe du mouvement de la voiture, détecte les ondes directes provenant de la voiture et celles réfléchies par le mur. Il y a deux cas de figure possibles :

a) L'observateur est situé entre la voiture et le mur (avec un décalage transversal pour lui éviter de se faire écraser ; on négligera ce décalage).

b) La voiture est entre l'observateur et le mur.

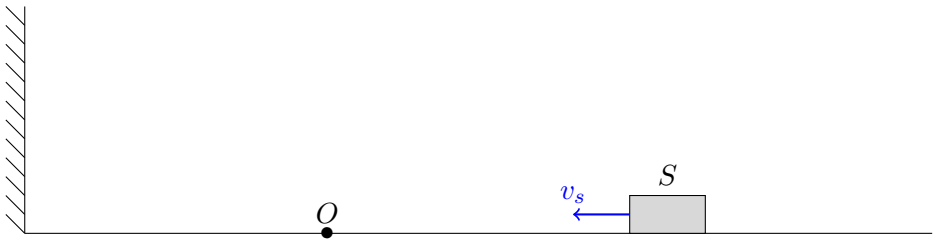
Quelle est la fréquence des éventuels battements perçus par l'observateur dans chacun des cas ?

Réponse : *Rappelons la formule pour l'effet Doppler :*

$$f' = f \cdot \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s},$$

où v est la vitesse du son, v_o la vitesse de l'observateur et v_s la vitesse de la source. On prend les signes du haut si la source et l'observateur se rapprochent, et ceux du bas s'ils s'éloignent.

a) Représentons la situation :



L'observateur reçoit deux ondes sonores différentes, provenant de la source ou réfléchies par le mur. Pour les ondes reçues directement par la source, il faut utiliser la formule de l'effet Doppler avec une source en mouvement, qui se rapproche de l'observateur :

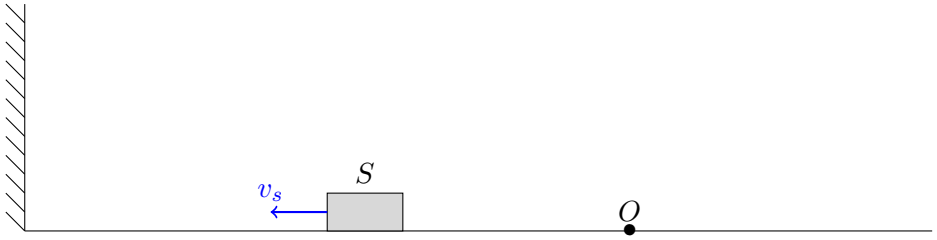
$$f'_{auto} = f \cdot \frac{v + 0}{v - v_s},$$

où v_s est la vitesse de la voiture. Les ondes reçues par le mur sont reçues à la même fréquence f'_{auto} (puisque le mur est également fixe). Le mur va ensuite réémettre des ondes à cette même fréquence, qui seront reçues par l'observateur encore à cette même fréquence puisque ni le mur ni l'observateur ne sont en mouvement. Donc,

$$f'_{auto} = f'_{mur}$$

et il n'y a donc pas de battements.

b) La situation est la suivante :



Cette fois, l'observateur et la source s'éloignent. La fréquence des ondes reçues directement par l'observateur est donc :

$$f'_{auto} = f \cdot \frac{v - 0}{v + v_s}.$$

En revanche, la voiture se rapproche du mur, donc la fréquence perçue par le mur est la même qu'au point précédent :

$$f'_{mur} = f \cdot \frac{v+0}{v-v_s}.$$

L'observateur reçoit ensuite les ondes réfléchies par le mur à la même fréquence f'_{mur} puisque l'observateur comme le mur sont au repos.
L'observateur reçoit donc deux ondes à des fréquences différentes, il y aura donc des battements. La fréquence des battements est de :

$$\begin{aligned}
f_{battements} &= |f'_{auto} - f'_{mur}| \\
&= \left| f \cdot \frac{v}{v+v_s} - f \cdot \frac{v}{v-v_s} \right| \\
&= f \cdot v \cdot \left| \cdot \frac{1}{v+v_s} - \cdot \frac{1}{v-v_s} \right| \\
&= f \cdot v \cdot \left| \frac{v - v_s - v - v_s}{v^2 - v_s^2} \right| \\
&= f \cdot v \cdot \left| \frac{-2v}{v^2 - v_s^2} \right| \\
&= f \cdot \frac{2v \cdot v_s}{v^2 - v_s^2} = \boxed{24{,}5\,\text{Hz}}.
\end{aligned}$$

NOM, PRENOM (en majuscules) ….……...…….……

SECTION (entourez votre section)

Chimie Mathématique Physique Polyvalente

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 20 juin 2018

I. Théorie (20 points – 1 heure 15')

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Note théorie : /20

Toutes les sections

1. Définissez, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez :
a) résistance électrique d'un élément de circuit
b) circulation du champ magnétique
c) différence de potentiel électrostatique
(3 points)

a) $R = V/I$, où V est la tension aux bornes de cet élément et I, le courant qui traverse cet élément

b) $\oint_C \vec{B}.\vec{dl}$, où $\vec{B}$ est le champ magnétique, $\vec{dl}$ est un élément de parcours et C, le parcours fermé sur lequel l'intégrale curviligne est faite

c) différence de potentiel électrostatique entre les points A et B : $V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q}$, où W_{AB} est le travail qu'il faut fournir (contre la force électrostatique) pour amener la charge test q du point A au point B.

Toutes les sections

2 . Calculez l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur de capacité *C* chargé sous une tension V.
(3 points)

Les électrodes d'un condensateur qui porte une charge q sont à une différence de potentiel $V(q)=\frac{q}{C}$.

Pour ajouter une charge élémentaire dq, il faut amener cette charge de l'électrode négative à l'électrode positive, et travailler une quantité $dW=V(q)dq=\frac{q}{C}dq$.

Pour charger la capacité jusqu'à une charge $Q=CV$ il faut fournir :

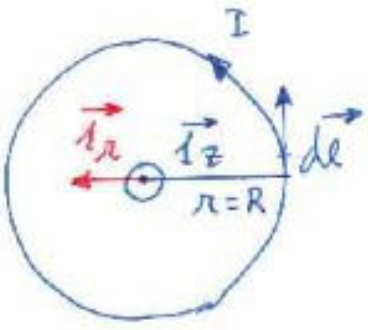
$W=\int_0^{CV}\frac{q}{C}dq=\frac{(CV)^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2$, travail qui est stocké sur la capacité sous forme d'énergie électrostatique.

Toutes les sections

3 . Énoncez la loi de Biot et Savart, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez. Appliquez-la au calcul du champ magnétique au centre d'une spire conductrice circulaire placée dans l'air, de rayon *R*, et parcourue par un courant *I*.
(4 points)

$$d\vec{B}=\frac{\mu_O I}{4\pi r^2}\,d\vec{l}\times\vec{1}_r \quad ,$$

où $d\vec{B}$ est le champ élémentaire produit par l'élément de courant $I\,d\vec{l}$ en un point situé à distance *r* de cet élément de courant.
Le vecteur $\vec{1}_r$ est le vecteur unitaire dirigé de l'élément de courant vers le point où on calcule le champ.
La constante μ_0 est la perméabilité du vide (quasi égale à celle de l'air).



Sur le schéma :

- $d\vec{l}\times\vec{1}_r$ est toujours dirigé selon l'axe de la spire $\vec{1}_z$ et $d\vec{l}\times\vec{1}_r=dl\,\vec{1}_z$
- $r = R$ le rayon de la spire.

Alors :

$$d\vec{B}=\frac{\mu_O I}{4\pi R^2}\,dl\,\vec{1}_z$$

et si on intègre le long de la spire :

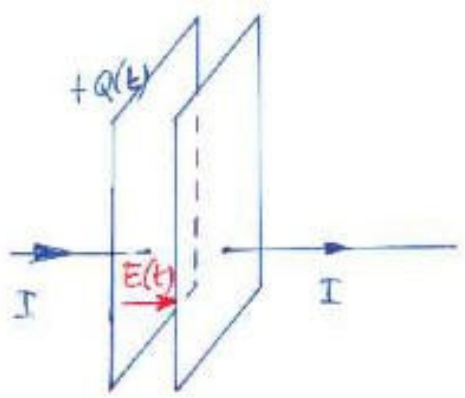
$$\vec{B}=\vec{1}_z.\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_O I}{4\pi R^2}\,dl=\vec{1}_z.\frac{\mu_O I}{2R} \quad .$$

Toutes les sections

4. Démontrez que le courant de déplacement entre les plaques conductrices d'un condensateur plan est égal au courant électrique qui charge ce condensateur. Définissez tous les symboles que vous introduisez.
(4 points)

Courant de déplacement :

$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$, où $\frac{d\Phi_E}{dt}$ est la dérivée du flux du champ électrique par rapport au temps, et ϵ_0 est la permittivité du vide.



Dans un condensateur plan fait de plaques de surface *S*, le champ électrique est uniforme et perpendiculaire aux plaques : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, où σ est la densité de charge sur la plaque positive. Le flux vaut alors :

$\Phi_E = S.E = S.\frac{Q}{S}.\frac{1}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, où Q est la charge sur la plaque positive.

Alors : $I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{dQ}{dt}$ c'est à dire le courant qui charge le condensateur.

Ce résultat est valable si le seul champ électrique variable entre les plaques est le champ dû aux charges sur les plaques.

Sections Chimie et Polyvalente

5. Expliquez comment fonctionne le chauffage par induction.
(3 points)

Par la loi d'induction de Faraday, un flux de champ magnétique variable au cours du temps produit un champ électrique et une f.é.m. induits :

$$\varepsilon = \frac{-d\,\Phi_B}{dt}$$

Si cette f.é.m. est induite dans un matériau conducteur, un courant induit va circuler et produire un échauffement par effet Joule :

$P_{Joule} = \frac{\varepsilon^2}{R}$, où R est la résistance du matériau.

La puissance dissipée est d'autant plus grand que la résistance du matériau est faible.

Sections Chimie et Polyvalente

6. Montrez que, lorsqu'on applique une tension alternative sinusoïdale aux bornes d'une capacité, la puissance électrique moyenne consommée par la capacité est nulle.
Rappel : sin(a).cos(a) = ½ . sin(2a)
(3 points)

Puissance électrique instantanée : $P(t)=V(t)\,I(t)$

Puissance moyenne : $P=\frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,I(t)\,dt$, où T est la période de la tension sinusoïdale.

Tension sinusoïdale : $V(t)=V_0\sin(\omega t)$, où V_0 est l'amplitude de la tension et $\omega=\frac{2\pi}{T}$ est la pulsation.

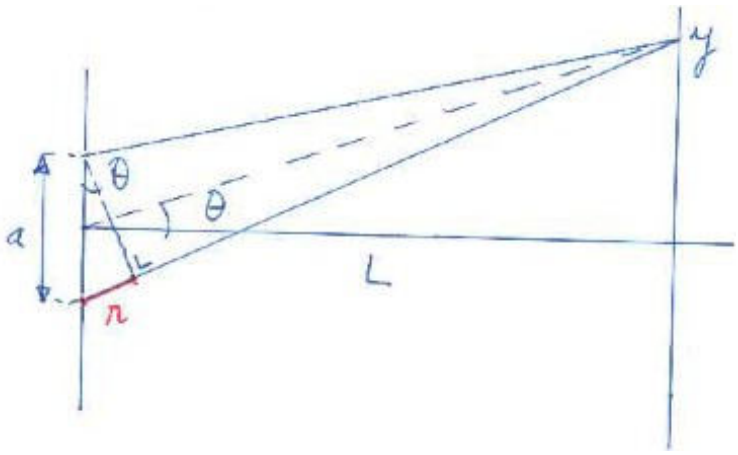
Le courant qui charge la capacité : $I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{dCV(t)}{dt}=CV_0\omega\cos(\omega t)$

Donc la puissance moyenne :

$$P=CV_0^2\omega.\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt=CV_0^2\omega.\frac{1}{2T}\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt=0 \quad .$$

Sections Mathématique et Physique

7. On éclaire un panneau opaque comportant deux minces fentes rectilignes avec la lumière monochromatique cohérente d'un laser. On observe les franges d'interférence sur un écran placé à grande distance derrière le panneau. Les maxima sont séparés d'une distance *s* quand le dispositif est dans l'air. A présent, on plonge tout le dispositif dans un milieu transparent d'indice de réfraction *n* (de l'eau, par exemple). Calculez la distance entre les maxima dans cette situation.
(3 points)



Dans l'air, pour avoir un maximum d'interférence il faut :
$r = m.\lambda$, où m est un entier et λ la longueur d'onde dans l'air.

Si l'écran est à une distance L grande par rapport à la distance a entre les fentes, et le maximum considéré, d'ordre m, est à une distance y_m petite par rapport à L, on peut écrire :

$r = a.\theta$

$\theta = \frac{y_m}{L}$

Donc $y_m = \frac{mL\lambda}{a}$ et la distance entre maxima successifs vaut : $s = \frac{L\lambda}{a}$.

Si on plonge le dispositif dans un matériau d'indice n, la longueur d'onde $\lambda_n = \frac{c}{n}\frac{1}{f} = \frac{\lambda_{air}}{n}$, en faisant l'approximation que l'indice de réfraction de l'air = 1.

Donc $s_n = \frac{s}{n}$.

Sections Mathématique et Physique

8. En relativité restreinte, le carré de l'énergie totale d'un corps s'écrit :

$E^2 = p^2 c^2 + m_0{}^2 c^4$ **,**

où *p* est la quantité de mouvement de ce corps, m_0 sa masse au repos et *c*, la vitesse de la lumière. Montrez comment cette relation mène à l'expression :

$E = mc^2$ **,**

en ayant soin de définir toutes les grandeurs et tous les symboles que vous introduisez. (3 points)

$E^2 = (mv)^2 c^2 + m_0{}^2 c^4 = (\gamma m_o v)^2 c^2 + m_0{}^2 c^4$, où $m = \gamma m_o$ est la masse relativiste du corps en mouvement, et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, où $\beta = \frac{v}{c}$.

Alors :

$E^2 = \frac{(m_o v)^2}{1-\beta^2} c^2 + m_0{}^2 c^4 = m_0{}^2 c^4 (\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)} + 1) = m_0{}^2 c^4 (\frac{1}{1-\beta^2}) = \gamma^2 m_0{}^2 c^4 = m^2 c^4$.

Et l'énergie est définie positive car $m \geq m_0$, donc $E = mc^2$.

NOM, PRENOM (en majuscules) ..……...……..……

SECTION (entourez votre section)

Chimie Mathématique Physique Polyvalente

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 20 juin 2018

II. Exercices (20 points – 2 heures)

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

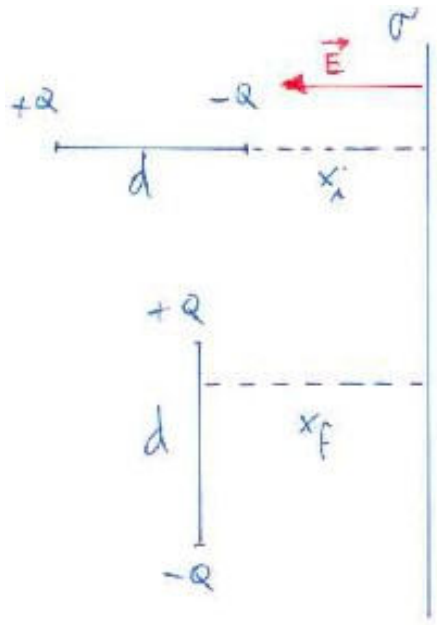
Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Q : 1 */4* **2** */4* **3** */4* **4 ou 6** */4* **5 ou 7** */4*

Note totale exercices : /20

Toutes les sections

1. Une molécule polaire de longueur *d* comporte une charge *+Q* à l'une de ses extrémités, et une charge *(-Q)* à l'autre. Elle est placée à proximité d'une membrane plane qui porte une densité de charge uniforme $+\sigma$. Elle s'oriente librement jusqu'à l'équilibre. Calculez l'expression de l'énergie qu'il faut fournir pour changer l'orientation de cette molécule, depuis la situation d'équilibre jusqu'à la situation où l'axe de la molécule est parallèle à la membrane. Supposez que la membrane est infinie, et que le milieu dans lequel la molécule et la membrane sont placées a la même permittivité que l'air.
(4 points)



L'énergie à fournir est égale à la différence d'énergie potentielle électrostatique entre les 2 situations :

$W = U_f - U_i$

Dans le champ dû à la membrane uniformément chargée, l'énergie potentielle d'une charge à distance *x* de celle-ci vaut, par rapport à un point sur la membrane :

$U(x) = Q.V(x) = -Q\,E\,x = -Q\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$, où $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ est le champ dû à la membrane, et $V(x)$ le potentiel dû à ce champ.

Donc pour la molécule dipolaire :

$U_i = -Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.(x_i + d) + -(-Q).\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.x_i = -Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.d$

et :

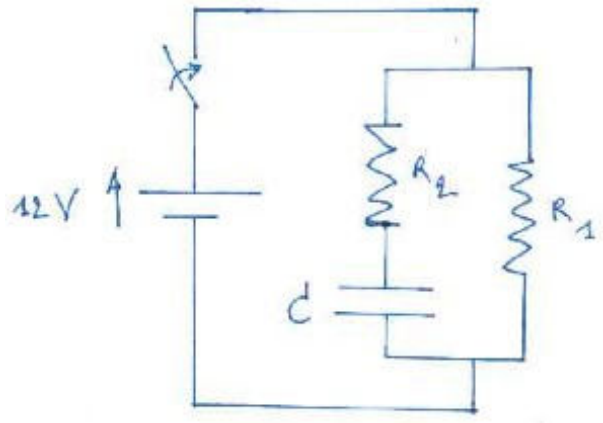
$U_f = -Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.x_f + -(-Q).\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.x_f = 0$

Donc il faut fournir un travail :

$W = +Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.d$

Toutes les sections

2. Dans le circuit ci-dessous, la résistance R_1 vaut 1,0 kΩ, la capacité C vaut 470 nF et la résistance R_2 est de 1,7 kΩ. La pile fournit une tension de 12 V. On ferme l'interrupteur et on mesure le courant fourni par la pile. Combien de temps faut-il, après avoir fermé l'interrupteur, pour que le courant atteigne la valeur de 15 mA ? Le condensateur est initialement déchargé.
(4 points)



Loi des noeuds :

$$I_{pile}(t)=I_1(t)+I_2(t)$$

Loi des mailles : la tension de la pile est appliquée au circuit R_2C et à la résistance R_1 :

$$I_1(t)=\frac{V_{pile}}{R_1}$$

$$I_2(t)=\frac{V_{pile}}{R_2}\exp(-t/R_2C)$$

Donc

$$15\,mA=a=\frac{V_{pile}}{R_1}+\frac{V_{pile}}{R_2}\exp(-t/R_2C)$$

$$\frac{-t}{R_2C}=\ln\left(\frac{R_2}{V_{pile}}\left(a-\frac{V_{pile}}{R_1}\right)\right)$$

$$t=-(R_2C).\ln\left(\frac{R_2}{V_{pile}}\left(a-\frac{V_{pile}}{R_1}\right)\right)=-(1{,}7.10^3.470.10^{-9}).\ln\left(\frac{1{,}7.10^3}{12}.(15.10^{-3}-\frac{12}{10^3})\right)$$

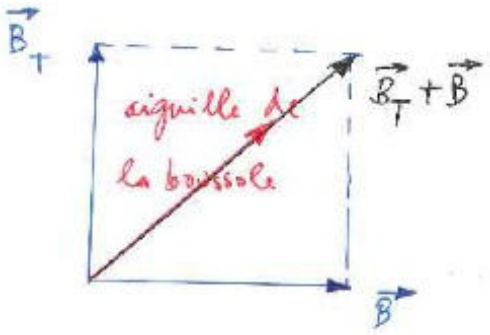
$$t=-8.10^{-4}.\ln(142.3.10^{-3})=0{,}68\,ms.$$

Toutes les sections

3 . Le dispositif ci-dessous permet de mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Il est fait d'un tube en plastique transparent, de 19,2 cm de longueur et de 16 cm² de section, autour duquel est enroulé un bobinage de 24 spires espacées de 8,0 mm. Le bobinage a une résistance électrique de 10,0 Ω . On place une boussole au milieu du tube, et on oriente l'axe du tube dans la direction Ouest-Est, l'aiguille de la boussole indiquant le Nord. On applique alors une tension continue égale à 2,2 V aux bornes du bobinage, et, après 1,2 seconde, l'aiguille de la boussole fait un angle de 45° avec l'axe du tube. Calculez la valeur de la composante horizontale du champ terrestre.
(4 points)

Dispositif © Prof. J.-M. Frère (ULB)





A l'instant où la boussole fait un angle de 45°, le champ dû au solénoïde est égal à la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Ce champ vaut :

$B(t)=\mu_0 \frac{N}{d} I(t)$, où N est le nombre de spires et d la longueur du solénoïde, et $I(t)$ le courant dans le fil.

Le bobinage constitue un circuit RL dont la constante de temps est :

$\tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{R}.\mu_0 \frac{N^2}{d} S$, où S est la section de la bobine.

Donc :

$\tau=\frac{1}{10}.4\pi.10^{-7}\frac{24^2}{0{,}192}.16.10^{-4}=6{,}0.10^{-7}s.$

Comme $1{,}2s \gg 6{,}0.10^{-7}s$ le courant maximum est atteint au moment où on observe la boussole : $I=2{,}2V/10\Omega=0{,}22A.$

Donc $B=4\pi.10^{-7}\frac{24}{0{,}192}.0{,}22=3{,}5.10^{-5}T.$

Sections Chimie et Polyvalente

4. Des électrons et des protons, d'énergies cinétiques égales, entrent dans un champ magnétique perpendiculaire à leur trajectoire. Que vaut, en valeur absolue, le rapport entre l'accélération centripète subie par les protons et l'accélération centripète subie par les électrons ? Supposez que la masse du proton vaut $1{,}8.10^3$ fois celle de l'électron.
(4 points)

Accélération centripète : $a_c = \frac{v^2}{R}$, où le rayon R de la trajectoire est lié à la quantité de mouvement des particules par : $mv = qBR$, où q est la charge des particules, donc $R = \frac{mv}{qB}$

Donc :

$$a_c = \frac{vqB}{m}$$

D'autre part $v = \sqrt{\frac{2.E_{cin}}{m}}$.

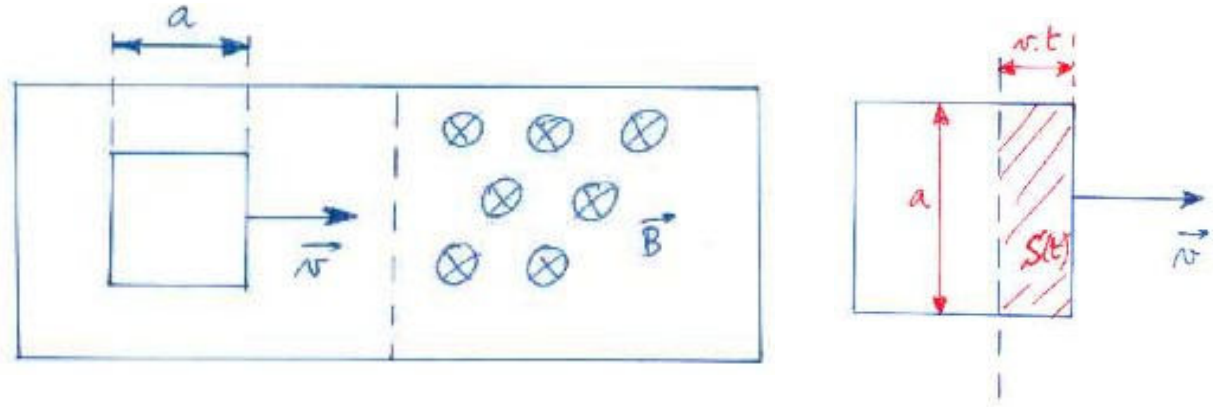
Donc en valeur absolue :

$$\left|\frac{a_{c,p}}{a_{c,e}}\right| = \frac{m_e\sqrt{m_e}}{m_p\sqrt{m_p}} = 1{,}3.10^{-5}.$$

Sections Chimie et Polyvalente

5. Sur une table horizontale, on fait glisser à vitesse constante *v* un cadre horizontal carré, depuis le côté gauche de la table vers le côté droit. Le cadre est formé de 4 barreaux conducteurs, chacun de longueur *a* et de résistance électrique *R*, soudés ensemble. Un champ magnétique vertical *B* constant baigne la moitié droite de la table. Quelle est l'expression de la force de freinage que le cadre métallique subit au moment où il entre dans le champ magnétique ? Supposez que les côtés du cadre sont parallèles aux bords de la table, et qu'il n'y a pas de frottement entre le cadre et la surface de la table.

(4 points)



A partir de l'instant où le cadre atteint le coté droit de la table, un flux de $\vec{B}$ croissant le traverse. Ceci induit une f.é.m. dans le cadre, qui est alors parcouru par un courant électrique *I*. La force de freinage est la force magnétique qui s'exerce sur ce courant.

Force totale :

$$F = B.I.a$$

Courant : $I = \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{1}{4R}.\frac{d\Phi_B}{dt}$; où Φ_B est le flux de $\vec{B}$.

Ce dernier s'exprime comme suit : $\vec{B}$ est perpendiculaire à la surface du cadre. *t* secondes après que le cadre a atteint la zone de champ non-nul, la portion de cette surface qui est dans le champ est : $S(t) = a.vt$

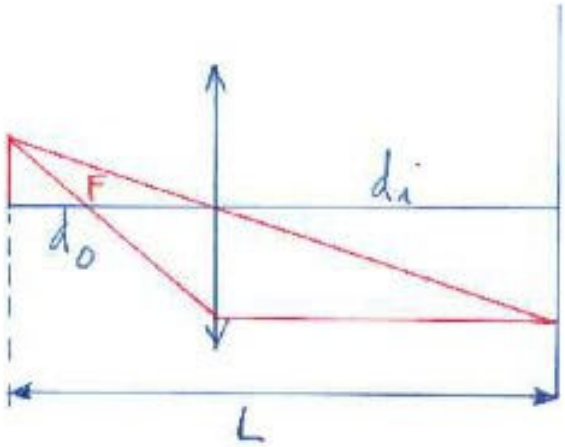
Donc : $\Phi_B(t) = B.a.vt$.

Dès lors :

$$F = \frac{B^2.a^2 v}{4R}$$

Sections Mathématique et Physique

6. On dispose d'une lentille convergente, de distance focale *f*, et d'un écran. Un objet est placé à une distance fixe de l'écran, notée *L*. On place la lentille entre l'objet et l'écran.
a) A quelle distance de l'objet faut-il placer la lentille pour former sur l'écran une image nette et agrandie ?
(3 points)
b) Toutes les lentilles convergentes conviennent-elles pour ce dispositif ?
(1 point)



a) Dans la situation décrite d_0 et d_i sont positives.

Image réelle agrandie → grandissement transversal $m=\frac{-d_i}{d_0}<-1$ donc $d_i>d_0$.

On sait :

$$d_0+d_i=L$$

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$$

Après quelques calculs on trouve une équation du 2nd degré dont les racines sont :

$$d_0=\frac{L\pm\sqrt{(L^2-4Lf)}}{2} \quad .$$

On garde la plus petite des solutions pour avoir $d_0<\frac{L}{2}$ et donc $d_i>d_0$.

b) Non, il faut que la distance focale $f<\frac{L}{4}$ sinon l'équation du second degré n'admet pas de racine réelle.

Sections Mathématique et Physique

7. Chasse relativiste.

Un chasseur et son chien à l'affut voient un sanglier immobile à 100 m de distance. Le chasseur tire et, au même instant, le chien file vers le sanglier à la vitesse de 0,25*c*, où *c* est la vitesse de la lumière. $7{,}7.10^{-7}$ secondes après le tir, le chien voit que la balle a touché le sanglier. Combien de temps après le tir le chasseur voit-il, lui aussi, que le sanglier est touché ?

(4 points)

Evé. 1 : le chasseur tire
Coordonnées (0 ; 0) dans les 2 référentiels

Evé. 2 : le chien voit que le sanglier est touché
Coordonnées *(x'; t')* = (0 ; $7{,}7.10^{-7}$ s) dans le référentiel du chien
Coordonnées *(x ; t)* dans le référentiel du chasseur.

Pour que le chasseur voie que le sanglier est touché, il faut que la lumière parcoure la distance supplémentaire entre l'endroit où le chien se trouve, et l'endroit où le chasseur se trouve :

$$t_c = t + \frac{x}{c}$$

En applicant les transformations de Lorentz :

$$t = \gamma\left(t' + \beta/c\, x'\right) = \gamma\, t'$$
$$x = \gamma\left(x' + v t'\right) = \gamma\, v\, t'$$

où v est la vitesse du chien, $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Donc $t_c = \gamma(1+\beta)\, t' = 1{,}033.1{,}25.7{,}7.10^{-7}\, s = 9{,}9.10^{-7}\, s$.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Exercices

Année 2018-2019 - Examen de juin 2019

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **9 feuilles** (4 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
7. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
8. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
9. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
10. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
    - Masse volumique de l'eau : $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{m^3}$
11. L'examen dure **2h (120 minutes)**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3	Q4
/8	/10	/12 + /4	/10

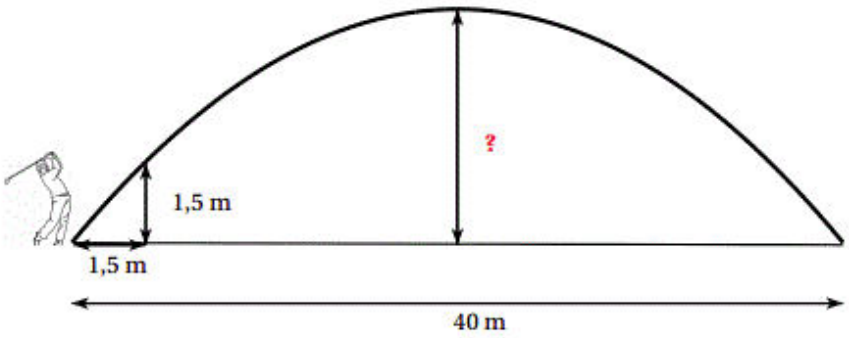


Fig. 1 – Golfeur frappant une balle.

1. (Toutes sections — 8 points) :

Un golfeur frappe sa balle avec un angle de 45°. La trajectoire de la balle est parabolique (on néglige les frottements de l'air). La distance horizontale pacourue par la balle est 40m.

Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle.

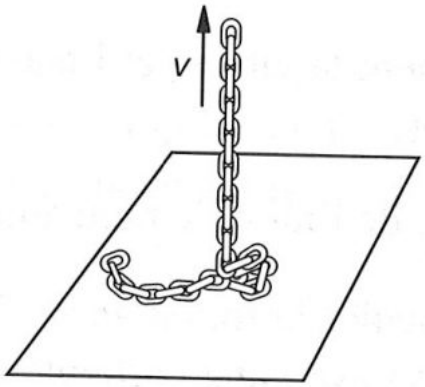


Fig. 2 – Chaine dont l'extrémité est tirée vers le haut à une vitesse v constante.

2. (Toutes sections — 10 points) :

L'extrémité d'une chaine, de masse par unité de longueur μ, au repos sur une table pour $t \leq 0$, est soulevée verticalement à une vitesse constante v pour $t > 0$, comme le montre la figure.

a) À l'instant $t > 0$, une partie de la chaine est immobile sur la table, et une partie de la chaine est en mouvement. Exprimez la masse de la partie de la chaine qui est en mouvement à l'instant $t > 0$ en fonction des variables de l'énoncé.

b) Exprimez la quantité de mouvement de la partie de la chaine qui est en mouvement à l'instant $t > 0$ en fonction des variables de l'énoncé.

c) Nous désirons évaluer la force $\vec{F}(t)$ exercée vers le haut sur le bout de la chaine pour soulever la chaine. Pour cela il est commode d'utiliser la deuxième loi de Newton reformulée comme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \tag{1}$$

où $\vec{F}_{ext}$ sont les forces externes agissant sur la chaine, et $\vec{P}$ la quantité de mouvement de la chaine. Déterminez la force $\vec{F}(t)$.

d) Déterminez le travail effectué par la force $\vec{F}(t)$ entre l'instant $t = 0$ et l'instant t.

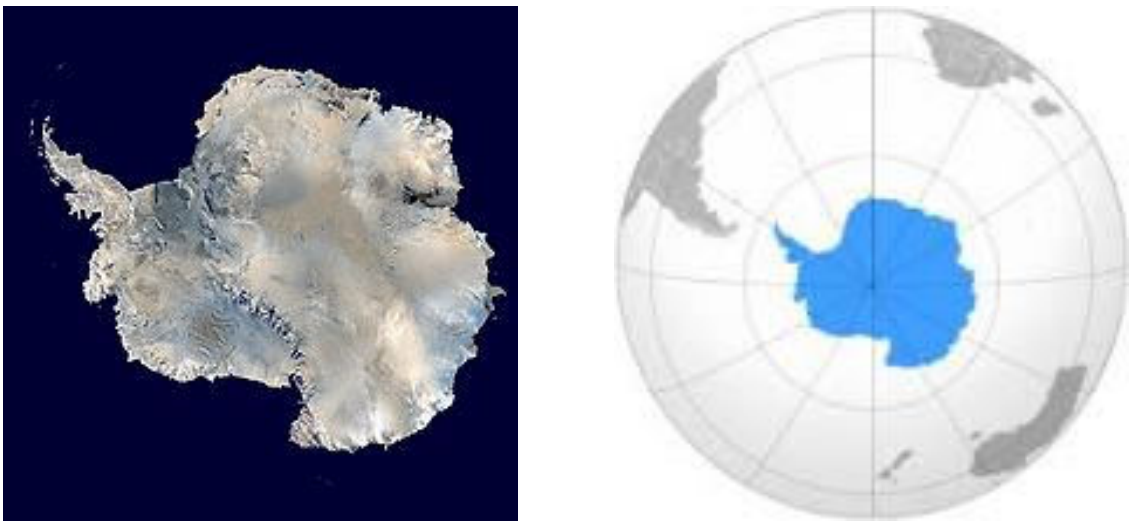


Fig. 3 – L'Antarctique vu de l'espace.

3. (Toutes sections pour questions a–d, uniquement Math-Ph, Math-Bio et Physique pour la question e — 12 ou 16 points) :

L'Antarctique (voir la figure) est couvert d'une calotte glaciaire. Cette calotte glaciaire couvre une surface d'à peu près $14 \times 10^6\,\mathrm{km}^2$ et a une épaisseur moyenne de 1,8 km. Le réchauffement climatique actuellement en cours pourrait entrainer la fonte de la calotte glaciaire de l'Antarctique.

Vous allez étudier quelques unes des conséquences de la fonte de la calotte glaciaire de l'Antarctique. Dans cette analyse vous ferez plusieurs simplifications : vous pourrez négliger par exemple qu'une partie de la calotte glaciaire de l'Antarctique est sous le niveau de la mer, ou que les océans ne couvrent pas la totalité de la surface de la Terre (ils couvrent 70% de la surface de la Terre), ou que la glace n'a pas la même masse volumique que l'eau liquide (et aussi que la masse volumique de la glace et de l'eau change légèrement avec la pression et la température), ou que la calotte glaciaire de l'Antarctique a une contribution non nulle au moment d'inertie de la Terre avant qu'elle fonde. Par conséquent des réponses numériquement différentes de la réponse exacte, mais avec un raisonnment correct pourront être admises.

a) Estimez la masse de la calotte glaciaire de l'Antarctique.

b) Estimez de combien le niveau de la mer monterait si la calotte glaciaire de l'Antarctique fondait entièrement.

c) La fonte de la calotte glaciaire de l'Antarctique entrainerait une modification de la durée du jour (période de rotation de la Terre sur elle-même). Est ce que la durée du jour s'allongerait, raccourcirait ? Pourquoi ?

d) Estimez de combien changerait la durée du jour si la calotte glaciaire Antarctique fondait totalement. Pour cela vous pouvez approximer la Terre comme une sphère pleine homogène de masse $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et de rayon 6 400 km.

   Vous aurez également besoin des informations suivantes : le moment d'inertie d'une sphère pleine homogène de rayon R et de masse M est $I_{\mathrm{SPleine}} = (2/5)MR^2$; le moment d'inertie d'une sphère creuse (une coquille sphérique mince) de masse M et de rayon R est $I_{\mathrm{SCreuse}} = (2/3)MR^2$.

e) Choisissez une des simplifications énumérées ci-dessus. Expliquez (sans faire de calcul, mais éventuellement en donnant les formules pertinentes) comment vous feriez pour ne pas faire cette approximation et obtenir une réponses numériquement plus correcte dans les réponses aux questions a,b,d.

f) **Physique, Math-Physique et Math-Bio uniquement.** Démontrez que $I_{\mathrm{SPleine}} = (2/5)MR^2$.



Fig. 4 – Quelques montgolfières.



Fig. 5 – Montgolfières avec le bruleur en action. Le bruleur injecte de l'air chaud dans l'enveloppe par l'ouverture qui se trouve dans le bas de l'enveloppe.

4. (Toutes sections sauf math–bio — 10 points) :

Une montgolfière (voir figure 4) est composée d'une nacelle surmontée d'une enveloppe légère. La sustentation de la montgolfière est assurée par l'air chauffé que renferme la nacelle, selon le principe de la poussée d'Archimède. Le maintien de la température de l'air nécessite l'emport d'un carburant et d'un bruleur (voir figure 5) .

Considérons une montgolfière dont la masse (enveloppe, nacelle, bouteilles de propane, passagers) est de 400 kg. Le volume d'air chauffé dans l'enveloppe est de $2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{m}^3$. La température ambiante est de 15°C et la pression atmosphérique de 1 atmosphère $= 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. À cette température la masse volumique de l'air est de $1{,}2\,\mathrm{kg/m}^3$. La montgolfière flotte sans monter ni descendre.

a) Dans ces conditions, quelle est la masse volumique de l'air dans l'enveloppe (supposé uniforme) ?

b) Expliquer pourquoi la pression de l'air est approximativement la même à l'intérieur et à l'extérieur de l'enveloppe.

c) Quelle est la température de l'air (que nous assimilons à un gaz parfait) dans l'enveloppe ?

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2018-2019 - Examen de juin 2019

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles** (3 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous n'avez pas droit à un aide-mémoire ou à une calculatrice.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées. Définissez soigneusement toutes les grandeurs que vous utilisez.**
9. L'examen dure **1h15 (75 minutes)**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3
/10	/10	/10

1. (Toutes sections sauf math-bio — 10 points) :

Fluides.

a) Énoncez l'équation de continuité (conservation de la masse) pour un fluide. (Il existe plusieurs formulations de l'équation de continuité. Vous ne devez en donner qu'une.)

b) Définissez la viscosité d'un fluide. Faites un schéma pour illustrer la définition.

c) Donnez les unités de la viscosité.

2. (Toutes sections — 10 points) :

Considérons une particule ponctuelle de masse m qui se meut dans l'espace à 3 dimensions, selon une trajectoire $\vec{x}(t)$, soumise à une force $\vec{F}(\vec{x}, t)$. A l'instant $t = t_0$ elle se trouve à la position $\vec{x}_0$, et à l'instant $t = t_1 > t_0$, elle se trouve à la position $\vec{x}_1$.

a) Définissez l'énergie cinétique de la particule à l'instant t.

b) Définissez le travail W effectué par la force $\vec{F}$ entre les instants $t = t_0$ et $t = t_1$.

c) Donnez un exemple illustratif dans lequel vous choisissez une force $\vec{F}(\vec{x}, t)$, des positions initiales et finales $(t_0, \vec{x}_0)$ et $(t_1, \vec{x}_1)$, et vous calculez le travail W effectué par la force $\vec{F}$ entre les instants $t = t_0$ et $t = t_1$. Attention : dans votre exemple la force $\vec{F}(\vec{x}, t)$ ne peut pas être constante (trop facile) : elle doit dépendre de la position et/où du temps.

d) Énoncez et démontrez le théorème de l'énergie cinétique pour cette particule ponctuelle. Faites particulièrement attention aux notations utilisée et aux étapes du calcul : toute expression incohérente mathématiquement sera sanctionnée.

3. (Toutes sections — 10 points) :

Nous considérons un solide au repos, en situation d'équilibre statique.

a) Enoncez précisément les conditions d'équilibre statique de ce solide.

b) Si ce solide est soumis à la force de pesanteur, expliquez comment tenir compte de la force de pesanteur : donnez le point d'application de la force, sa norme, sa direction, son sens.

c) Expliquez comment tenir compte des forces de contact entre le solide et une surface. Donnez le point d'application, la norme, la direction, le sens des forces de contact. Expliquez comment intervient le coefficient de frottement statique.

Faites un schéma pour illustrer vos définitions et explications.

NOM, PRENOM (en majuscules) ….……...…….……

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 19 juin 2019

I. Théorie (20 points – 1 heure 15')

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Note théorie : /20

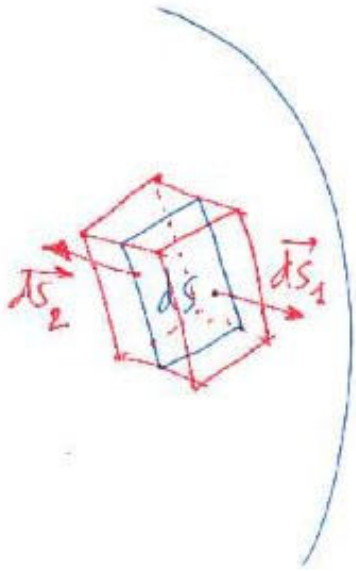
Toutes les sections

1. Utilisez le théorème de Gauss pour calculer l'expression du champ électrique à la surface d'un conducteur chargé à l'équilibre électrostatique. Précisez toutes les grandeurs et tous les symboles que vous introduisez.
(3 points)

Pour un conducteur chargé à l'équilibre électrostatique, on sait que :

- le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul ;
- le champ électrique à la surface du conducteur est perpendiculaire à cette surface ;

sinon il y aurait des courants électriques sous l'effet du champ électrique.



On choisit comme surface de Gauss la surface qui délimite un élément de volume en forme de parallélépipède, dont 2 faces $d\vec{S}_1$ et $d\vec{S}_2$, de surface dS, sont // à la surface du conducteur, l'une à l'intérieur et l'autre à l'extérieur, et dont 4 faces sont perpendiculaires à la surface du conducteur (voir schéma).

Alors par Gauss :

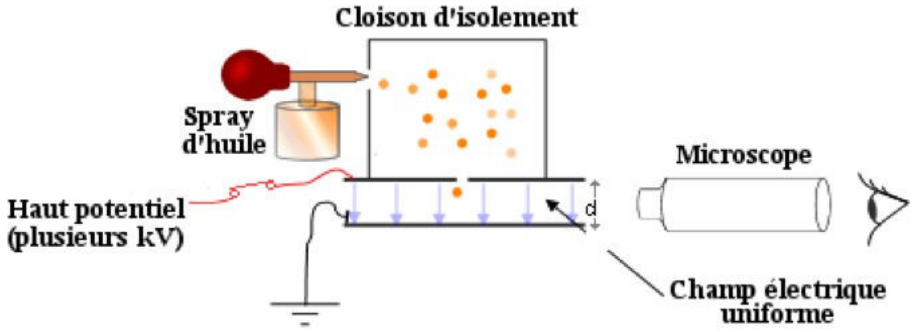
$\Phi_E = \vec{E}.d\vec{S}_1 + \vec{0}.d\vec{S}_2 + 0 = E.dS = \frac{\sigma.dS}{\varepsilon_0}$, où Φ_E est le flux du champ électrique, σ est la densité de charge à la surface du conducteur, et ε_0 est la permittivité du vide.

Donc : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Toutes les sections

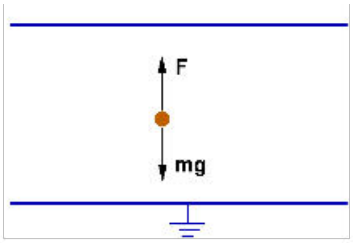
2. Expliquez l'expérience de la goutte d'huile de Millikan.
(4 points)

Le dispositif de Millikan permet d'observer le mouvement de gouttes d'huile ionisées dans un champ électrique uniforme.



Les gouttes d'huile s'ionisent par frottement en sortant du vaporisateur. Elles tombent ensuite sous l'effet de la gravité et sont soumises à la poussée d'Archimède et au frottement de l'air (de viscosité η).

En l'absence de champ électrique, elles chutent à une vitesse limite qui dépend de leur rayon :

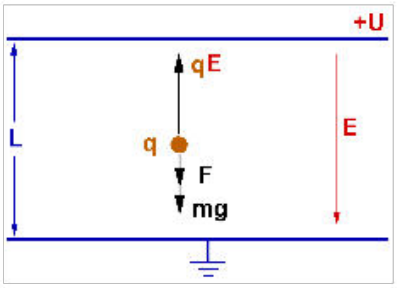


$$gm_{huile} - gm_{air} - 6\pi\eta r v_1 = 0$$

$$g\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{huile} - \rho_{air}) - 6\pi\eta r v_1 = 0$$

De v_1 on déduit le rayon r de la goutte.

En présence d'un champ électrique, la vitesse limite d'une goute donnée dépend de sa charge électrique : pour une goutte qui se déplace vers le haut :



$$gm_{huile} - gm_{air} - qE + 6\pi\eta r v_2 = 0$$

De v_2 et connaissant le rayon r, on déduit la charge q de la goutte.

Millikan observe que q est quantifiée et est un multiple (entier) de $1{,}6.10^{-19}$ C.

Toutes les sections

3 . Énoncez la loi d'Ampère-Maxwell où intervient le courant de déplacement, en précisant toutes les grandeurs qui interviennent.
(3 points)

Loi d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} . d\vec{l} = \mu_0 [\sum I + \frac{d}{dt}(\varepsilon_0 \Phi_E)]$$

avec :

$\vec{B}$: champ magnétique
$d\vec{l}$: élément de parcours fermé C
μ_0 : perméabilité du vide
$\sum I$: somme des intensités des courants encerclés par le parcours fermé C
ε_0 : permittivité du vide
Φ_E : flux du champ électrique à travers la surface délimitée par C

Toutes les sections

4. a) Enoncez la loi d'induction de Faraday, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez.
(2 points)
b) Appliquez-la pour calculer l'expression de la force électromotrice produite par un générateur de tension alternative sinusoïdale constitué d'un cadre de surface *S* autour duquel un fil conducteur est enroulé en *N* spires serrées. Ce cadre tourne avec une vitesse angulaire constante dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à l'axe de rotation du cadre. Précisez toutes les grandeurs que vous introduisez.
(2 points)

a) La loi d'induction de Faraday peut s'écrire :
$\varepsilon = \frac{-d\Phi_B}{dt}$, où ε est la force électromotrice induite dans une boucle conductrice fermée, et Φ_B est le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par la boucle.

b) Soit *B* l'intensité du champ magnétique, et $\alpha(t) = \omega t$ l'angle entre le champ magnétique et le vecteur normal à la surface du cadre, où ω est la vitesse angulaire du cadre.

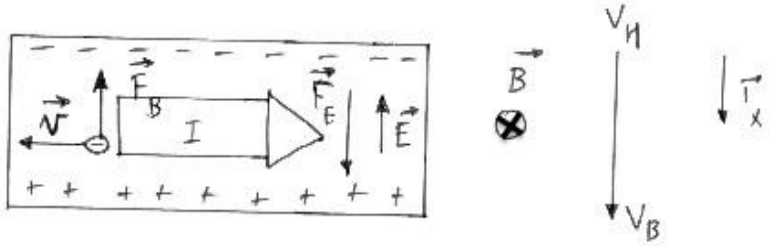
L'expression du flux du champ magnétique à travers 1 spire en fonction du temps est :
$\Phi_B = BS\cos(\omega t)$

Comme les *N* spires sont en série, la f.é.m. aux bornes du fil a pour expression :
$\varepsilon = N\frac{-d\Phi_B}{dt} = NBS\omega\sin(\omega t)$.

Sections Chimie et Polyvalente

5. Expliquez le principe de la mesure du champ magnétique par effet Hall à partir des lois qui décrivent les forces électrique et magnétique.
(3 points)

L'effet Hall permet de mesurer le champ magnétique à partir de la différence de potentiel qui s'établit entre les faces latérales d'un conducteur plongé dans ce champ lorsqu'il est parcouru par un courant électrique. Cette différence de potentiel s'établit dans la direction perpendiculaire au courant (voir schéma).



Les porteurs de charge mobiles qui constituent le courant se déplacent à vitesse moyenne v et subissent une force magnétique perpendiculaire au courant. Supposons la charge des porteurs négative, et les sens du courant et du champ magnétique comme précisés sur le schéma.
Alors :

$$\vec{F}_B = -qvB\,\vec{1}_x$$

Les charges (-) s'accumulent sur la face supérieure du conducteur et créent un champ électrique du bas vers le haut, qui exerce une force électrique sur les charges mobiles, dans la direction opposée à la force magnétique. L'équilibre s'établit et l'accumulation de charges cesse lorsque :

$$\vec{F}_E = qvB\,\vec{1}_x$$
$$\vec{E} = -vB\,1_x$$

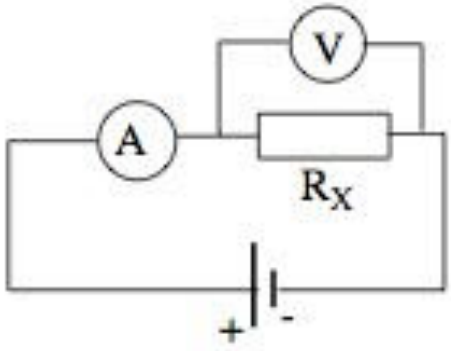
Alors la différence de potentiel entre les faces du conducteur s'obtient en intégrant le champ électrique (constant) d'une face à l'autre :

$V_{Bas} - V_{Haut} = -\int_{Haut}^{Bas} -vB\,dx = vBL$, où L est la largeur du conducteur.

Cette différence de potentiel est proportionnelle à B.

Sections Chimie et Polyvalente

6. Dans le montage ci-dessous, à quelle condition le rapport de la tension V mesurée au voltmètre et du courant I mesuré à l'ampèremètre est-il une bonne approximation de la résistance R_X ? Justifiez par un calcul.
(3 points)



Notons R_V la résistance interne du voltmètre, I_V le courant qui traverse le voltmètre et I_X le courant qui traverse la résistance R_X . On a :

$$I = I_X + I_V$$
$$V = R_X I_X = R_V I_V$$

En substituant les courants dans la 1e équation :

$$I = \frac{V}{R_X} + \frac{V}{R_V} = V\left(\frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_V}\right) = V\left(\frac{R_X + R_V}{R_X R_V}\right)$$

Alors :

$$\frac{V}{I} = \frac{R_X R_V}{R_X + R_V} = \frac{R_X}{1 + \frac{R_X}{R_V}} \quad .$$

Ce rapport tend vers R_X quand $R_V \gg R_X$: la résistance interne du voltmètre doit être grande par rapport à R_X .

Sections Mathématique et Physique

7. On dispose d'un objet et d'une lentille divergente (distance focale f < 0). Montrez que, si l'objet est réel, la taille de l'image est toujours réduite par rapport à celle de l'objet. (3 points)

L'expression du grandissement transversal est :

$m=\frac{-d_i}{d_0}$, où d_i, d_o sont les distances image et objet.

Equation de conjugaison : $\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$. On isole d_i :

$\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{d_0}=\frac{d_0-f}{f.d_0}$,

donc :

$m=\frac{-f}{d_0-f}$.

Comme l'objet est réel, $d_0>0$, et comme $(-f)=|f|>0$ on a :

$m=\frac{|f|}{d_0+|f|}<1$.

Sections Mathématique et Physique

8. On considère un référentiel prime ('), en mouvement à vitesse constante *v* dans la direction $\vec{1}_x$ par rapport au référentiel sans prime. À partir des expressions des transformations de Lorentz des coordonnées d'espace-temps ci-dessous :

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma\left(t' + v\frac{x'}{c^2}\right)$$

o ù $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ **est le facteur de dilatation du temps, calculez les expressions des transformations de toutes les composantes de la vitesse.**

(3 points)

On cherche à exprimer les composantes de la vitesse dans le référentiel « au repos », $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$, à partir des composantes de la vitesse dans le référentiel en mouvement, $\left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right) \cdot \frac{dt'}{dt}$$

et

$\frac{dt'}{dt} = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^{-1} = \left(\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}\right)\right)^{-1}$. Ce facteur traduit l'effet de la dilatation du temps.

Donc :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} .$$

Pour la composante selon y : le référentiel prime est en mouvement dans la direction x, donc

$$y = y'$$

et

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$. De façon similaire : $\frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$.

NOM, PRENOM (en majuscules) ..……...……..……

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 19 juin 2019

II. Exercices (20 points – 2 heures)

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Q : 1 */4* **2** */4* **3** */4* **4 ou 6** */4* **5 ou 7** */4*

Note totale exercices : /20

Toutes les sections

1. On raccorde une source de tension à un câble coaxial cylindrique très long. La borne positive est raccordée au fil central, de 1,0 mm de rayon, et la borne négative au conducteur extérieur, de 3,0 mm de rayon. L'isolant entre les conducteurs a une permittivité relative de 1,0 et peut supporter un champ maximum de $3{,}0.10^6$ V/m avant l'apparition de décharges électriques. On augmente progressivement la différence de potentiel entre les conducteurs. A quelle différence de potentiel les décharges apparaissent-elles ?
(4 points)

Le câble coaxial constitue un condensateur qui se charge lorsqu'on applique une tension entre le conducteur central et le conducteur extérieur. Le champ entre les conducteurs a pour expression :

$\vec{E}(r)=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}\vec{1}_r$, où λ est la densité linéique de charge sur le fil central, $\epsilon_0\epsilon_r$ est la permittivité de l'isolant, et r est la distance à l'axe du fil.

L'intensité du champ est donc maximum à la surface du fil central ($r=R_1=1{,}0\,mm$), soit :

$E(R_1)=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1}$, et les décharges apparaissent quand $E(R_1)=3{,}0.10^6 V/m$.

La différence de potentiel ΔV entre les fils est par définition :

$\Delta V=-\int_{R_1}^{R_2} E(\vec{r}).d\vec{r}=\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}\ln(\frac{R_2}{R_1})$.

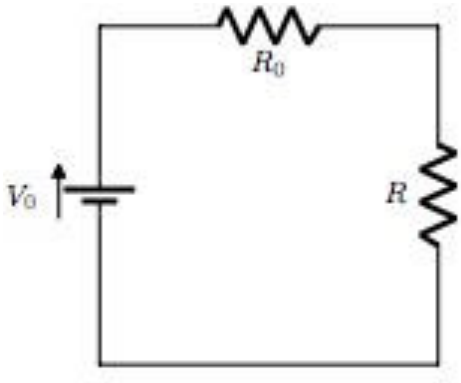
Donc :

$\Delta V=E(R_1).R_1.\ln(\frac{R_2}{R_1})$, et la tension à laquelle apparaissent les décharges est :

$\Delta V=3{,}0.10^6.1{,}0.10^{-3}.\ln(3)=3{,}3.10^3 V.$

Toutes les sections

2. Le circuit ci-dessous comporte une pile, qui fournit une tension continue V_0 et dont la résistance interne est notée R_0, et une résistance R raccordée à la pile.
a) Exprimez la tension aux bornes de la résistance R en fonction de V_0, R_0 et R.
(1 point)
b) On fait varier R et on observe que, lorsque $R = R_0$, la puissance dissipée dans R atteint un maximum. Montrez par un calcul que c'est le résultat attendu.
(3 points)



a) Loi des mailles : $V_0=(R_0+R).I$; loi d'Ohm : $V_R=R.I$ donc en éliminant I : $V_R=\frac{R}{R_0+R}.V_0$.

b) Puissance dissipée dans R : $P=\frac{V_R^2}{R}=\frac{R}{(R_0+R)^2}.V_0^2$.

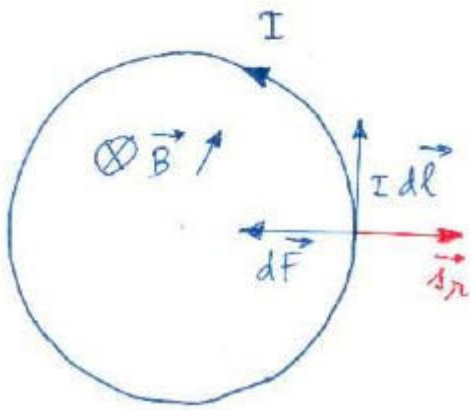
On recherche R qui correspond à un maximum de P : $R\,telle\,que\,\frac{\partial P}{\partial R}=0$, soit :

$$\frac{\partial P}{\partial R}=V_0^2.\frac{[(R_0+R)^2-R.2(R_0+R)]}{(R_0+R)^4}=V_0^2.\frac{(R_0^2-R^2)}{(R_0+R)^4} \quad ,$$

qui s'annule quand $R=R_0$, CQFD.

Toutes les sections

3. Une spire de surface S est constituée d'un fil conducteur circulaire de résistance R. Elle est placée dans un champ magnétique de sorte que le champ soit perpendiculaire à la surface de la spire. L'intensité du champ magnétique augmente linéairement au cours du temps selon l'expression B = k.t. On observe que la spire a tendance à se resserrer, à cause de forces radiales qui s'exercent sur le fil. Calculez l'expression de la force qui s'exerce par unité de longueur du fil. Négligez l'inductance de la spire, et négligez la déformation de la spire sous l'effet des forces.
(4 points)



Une f.é.m. est induite dans la spire, qui produit un courant dans celle-ci. Le champ magnétique exerce alors une force sur ce courant, de direction radiale car $\vec{dF} = I\,\vec{dl}\,x\,\vec{B}$ (voir schéma).

La f.é.m. : $\epsilon = \frac{-d\Phi_B}{dt} = k.S$

Comme l'inductance de la spire est négligeable, $I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{k.S}{R}$

Comme $I\,\vec{dl}\,x\,\vec{B} = I.dl.B.(-\vec{1}_r)$, où $\vec{1}_r$ est un vecteur radial, la force par unité de longueur a pour expression :

$\frac{\vec{dF}}{dl} = \frac{k^2.S.t}{R}\vec{1}_r$.

Sections Chimie et Polyvalente

4. Un cyclotron de Lawrence fonctionnant avec un champ magnétique de 1,0 T produit un faisceau de protons de 40 MeV d'énergie cinétique. Les protons sont accélérés depuis une vitesse initiale négligeable. A chaque demi-tour, ils traversent une différence de potentiel accélératrice de 10 kV.

a) Combien de temps prend l'accélération d'un proton jusqu'à l'énergie de 40 MeV ? Prenez $1{,}7.10^{-27}$ kg comme masse du proton.

(2 points)

b) A quelle énergie des noyaux de carbone comportant 6 protons et 6 neutrons sortiraient-ils du même cyclotron ? Négligez la différence de masse entre les neutrons et les protons.

(2 points)

a) A chaque demi-tour, les protons gagnent une énergie cinétique $q_p \Delta V$, où q_p est la charge du proton, et ΔV la ddp accélératrice. Ils parcourent donc $\frac{40\,MeV}{q_p \Delta V} = \frac{40\,MeV}{10\,keV} = 4000$ demi-tours avant de sortir du cyclotron.

Chaque demi-tour prend un temps $T_{1/2} = \frac{\pi m_p}{q_p B}$, où m_p est la masse du proton et B l'intensité du champ magnétique.

L'accélération prend donc un temps total : $T = 4000 . \frac{\pi . 1{,}7.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19} . 1{,}0} = 1{,}3.10^{-4} s$.

b) $E_C = \frac{1}{2} \frac{(q_C . B . R)^2}{m_C} = \frac{1}{2} \frac{(6 . q_p . B . R)^2}{12 . m_p} = \frac{36}{12} . \frac{1}{2} \frac{(q_p . B . R)^2}{m_p}$, où q_C, m_C sont la charge et la masse du noyau de carbone.

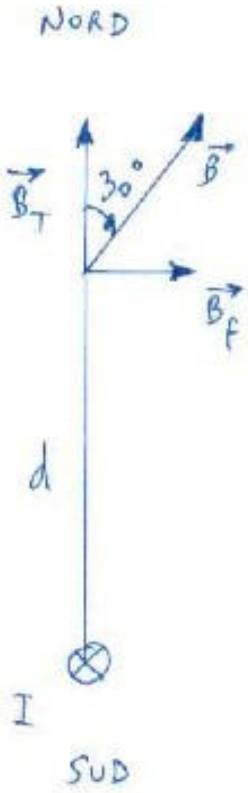
Donc $E_C = 3 . E_p = 1{,}2.10^2 MeV$.

Sections Chimie et Polyvalente

5. On suppose une boussole idéale qui s'aligne instantanément sur le champ magnétique. Elle est posée horizontalement sur le sol, à un endroit où la composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut 0,5.10^{-4} T vers le nord géographique. La foudre tombe verticalement à 7,0 m au sud de la boussole. L'aiguille de la boussole pointe alors à 30 degrés à l'est du nord géographique.

a) Quelle est l'intensité du courant électrique transporté par la foudre ?
(3 points)

b) Dans quel sens ce courant circule-t-il ? Justifiez votre réponse.
(1 point)



a) $\tan 30° = \frac{B_f}{B_T}$, où B_f, B_T sont les composantes du champ dues à la foudre et au champ magnétique terrestre (voir schéma).

L'intensité du champ dû à la foudre a pour expression $B_f = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$, où d est la distance entre la boussole et la foudre, et I est le courant recherché.

Donc : $I = B_T \tan 30° . \frac{2\pi d}{\mu_0} = 0{,}5.10^{-4} . \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{2\pi .7{,}0}{4\pi .10^{-7}} = 1{,}0\,kA$.

b) Par la règle de la main droite, si le champ total a une composante vers l'est, c'est que le courant de la foudre cause un champ magnétique dirigé vers l'est (voir schéma). Donc le courant est dirigé vers le sol.

Sections Mathématique et Physique

6. Un récepteur GSM est constitué d'un fil conducteur rectiligne de 2,0 cm de long. Ce fil est orienté parallèlement au champ électrique capté. A 100 m de l'émetteur, une tension de 4,8 mV d'amplitude est mesurée entre les extrémités du fil. A quelle distance de l'émetteur l'intensité maximale admise en région bruxelloise, 0,096 W/m^2, est-elle atteinte ? Supposez que l'émetteur produit une onde sphérique.
(4 points)

Par conservation de l'énergie, l'intensité décroit comme le carré de la distance à l'émetteur :

$$\frac{I(d_1)}{I(d_0)}=\frac{d_0^2}{d_1^2}$$

L'intensité (moyennée sur une période) et l'amplitude E du champ de l'onde é.m. sont liées par :

$$I=\frac{1}{2}c\epsilon_0 E^2 \quad ,$$

et l'amplitude du champ capté par l'antenne s'estime par : $E=\frac{\Delta V}{L}$, où ΔV est l'amplitude de la tension captée, et L est la longueur de l'antenne.

Alors : $d_1^2=\frac{1}{2}\frac{c\epsilon_0}{I_{max}}\left(d_0\frac{\Delta V}{L}\right)^2=0{,}5.\frac{3.10^8.8{,}85.10^{-12}}{0{,}096}.\left(100.\frac{4{,}8.10^{-3}}{2{,}0.10^{-2}}\right)^2=7{,}97m^2$.

Donc $d_1=2{,}8\,m$.

Sections Mathématique et Physique

7. Un électron initialement au repos est soumis à une différence de potentiel et atteint la vitesse de 0,405.c. Que vaut cette différence de potentiel ? Prenez 511 keV comme énergie de masse au repos de l'électron.
(4 points)

Conservation de l'énergie : $q_e \Delta V = (K_f + m_0 c^2) - (K_i + m_0 c^2) = \Delta K$, où q_e, m_0 sont la charge et la masse au repos de l'électron, c la vitesse de la lumière, et K_i, K_f les énergies cinétiques initiale et finale de l'électron.

On donne $K_i = 0\,eV$, et $K_f = m_0 c^2 (\gamma - 1) = 511\,keV \,.\, (\frac{1}{\sqrt{(1-0{,}405^2)}} - 1) = 47{,}9\,keV$.

Donc $\Delta V = 47{,}9\,kV$.

/6	/10	/10

INTERROGATION DE PHYSIQUE

31 Octobre 2019

Nom : CORRECTIF **Prénom :**

N° de carte d'étudiant :

Section : physique - math option physique – math option bio - polyvalente - chimie*

Règles de l'examen :

1. Les **GSM doivent êtres éteints et laissés** dans les serviettes le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.

2. Les notes et/ou livres ne peuvent être utilisés.

3. Vous pouvez utiliser n'importe quel type de calculette; celles-ci ne peuvent être prêtées. Les appareils de communication électronique tel **GSM, tablette, smartwatch,** etc. sont rigoureusement interdits.

4. Utilisez de l'encre **noire** ou **bleue**, ou un crayon. Le **rouge** est interdit, étant réservé pour la correction.

5. Lisez attentivement les questions **jusqu'au bout**. Si vous ne savez pas répondre à une sous-question, essayez **toutes** les suivantes ; il se peut que vous n'ayez pas besoin d'avoir résolu la question manquée pour y répondre.

6. **Les réponses doivent toutes être justifiées.** Un espace est prévu à cet effet après chaque question. De plus, des feuilles vierges sont disponibles sur demande. Les **unités** doivent être indiquées pour les résultats numériques.

7. Pour les calculs numériques, on prendra **$g=9{,}81\ ms^{-2}$**.

8. L'énoncé comporte **10 pages. La première chose à faire est de vérifier que votre énoncé est complet et d'indiquer votre nom et prénom.** Certaines pages sont laissées intentionnellement pratiquement vierges, pour vous laisser la place de répondre.

9. Durée de l'examen : 1h30

   Bon courage !

---

* barer les mentions inutiles.

Question 1 (6 points)

1.1 Énoncez les 3 lois de Newton.

1. Principe d'inertie : Tout corps soumis à aucune force conserve son état de repos ou de mouvement.
2. Relation fondamentale de la dynamique : Pour un corps de masse m, $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$, où $\vec{a}$ est l'accélération de la masse m et $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ sont les forces extérieures s'appliquant sur la masse m.
3. Principe d'action-réaction : Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{AB}$ sur un corps B, alors le corps B exerce une force $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ sur le corps A.

1.2 Un atome d'hydrogène ^1H est composé de constituants plus élémentaires. Quels sont-ils ?

Un électron et un proton.
Remarque : Le proton n'est en fait pas une particule élémentaire et est lui-même constitué de quarks et de gluons.

1.3 Écrivez 15 nanosecondes en utilisant la notation scientifique. (La notation scientifique pour 32 millions de mètres est $3{,}2\ 10^7$ m).

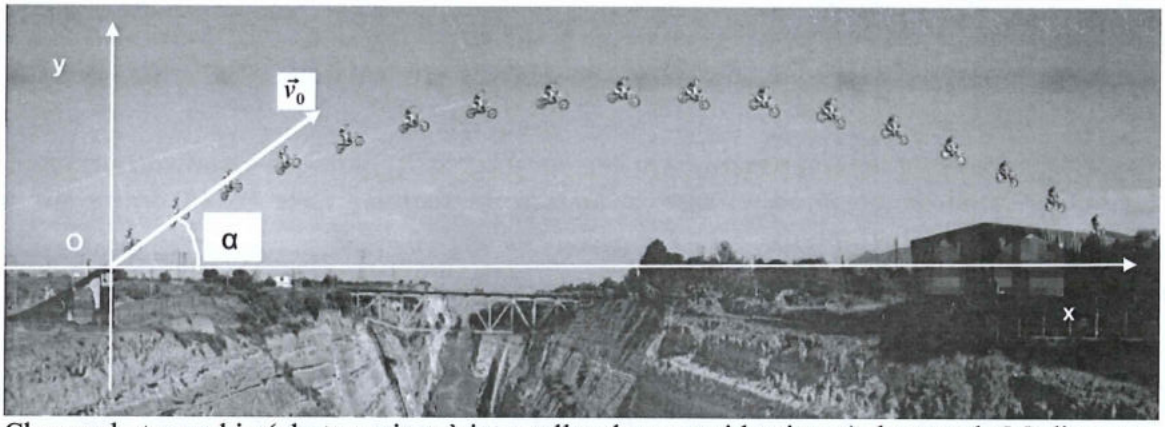
$15\ ns = 1{,}5 \cdot 10^{-8}\ s$.

1.4 En termes des unités fondamentales du Système International (m, kg, s, A), que vaut 1 watt ?

$1\,W = 1\,J/s = 1\,\frac{m \cdot N}{s} = 1\,\frac{m}{s} \cdot kg \cdot \frac{m}{s^2} = 1\,\frac{kg\,m^2}{s^3}$.

Question 2 (10 points)

Le canal de Corinthe est situé en Grèce. Il a été creusé pour relier la mer Égée et la mer Ionienne. Les parois rocheuses sont très hautes et l'eau s'écoule à 79 m au-dessous du niveau du sol. Plusieurs pilotes de moto ont eu l'intention de franchir le canal de Corinthe. L'Australien Robbie Maddison est le premier à réaliser cet exploit en avril 2010. Il a pris son élan pour accélérer sa moto et atteindre la vitesse de $v_0 = 125$ km.h^{-1}. Il a ensuite emprunté une rampe qui lui a permis de franchir le canal, avant d'atterrir de l'autre côté.



Chronophotographie (photos prises à intervalles de temps identiques) du saut de Madison au-dessus du canal de Corinthe.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre, supposé galiléen pendant la durée du saut. Le mouvement de Maddison et sa moto est étudié à l'aide du repère (O, x, y) représenté sur la chronophotographie.

À l'instant $t = 0$, Maddison et sa moto se trouvent à l'origine du repère et quittent le tremplin. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ du pilote et de sa moto fait alors un angle α avec l'axe horizontal (Ox) comme indiqué sur la chronophotographie. L'inclinaison en sortie du tremplin vaut $\alpha = 33°$. La vitesse en sortie de tremplin vaut $v_0 = 125$ km.h^{-1} . Tous les frottements sont négligés. On supposera que le sol du côté droit sur la photo est à la hauteur du haut du tremplin. N'oubliez pas de justifier (brièvement) vos réponses.

2.1 Quelles sont les composantes x et y du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ à l'instant t=0 ?

$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \, \vec{u}_x + v_0 \sin\alpha \, \vec{u}_y$

$= \boxed{(29{,}1 \; ; \; 18{,}3) \text{ m/s}}$.

2.2 Une des composantes de la vitesse $\vec{v}(t)$ ne change pas au cours du temps. Laquelle et pourquoi ?

La composante selon x est invariante car la seule force extérieure appliquée est le poids, dirigé selon l'axe y. Par la 2e loi de Newton, l'accélération en x est donc nulle et la vitesse selon cet axe est constante.

2.3 Quelles sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ lorsque Maddison à traversé le canal de Corinthe, et que sa trajectoire recroise l'axe Ox (à droite sur la chronophotographie) ?

La trajectoire est parabolique (MRUA en y, MRU en x) et donc symétrique. L'angle formé par le vecteur vitesse par rapport à l'axe x à la fin de la trajectoire sera donc $-\alpha$, et le module de la vitesse sera le même qu'au début de la trajectoire. $\Rightarrow \vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha \, \vec{u_x} - v_0 \sin\alpha \, \vec{u_y} = \boxed{(29{,}1 ; -18{,}9)\ m/s}$.

2.4 Quelle est la hauteur maximale au-dessus de l'axe Ox atteinte par Maddison ?

Écrivons les équations du mouvement (MRU en x, MRUA en y) :

$$\begin{cases} y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2} \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - g t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ v_x(t) = v_0 \cos\alpha \end{cases}$$

La hauteur est maximale lorsque $\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow v_y = 0$.

$\Rightarrow v_0 \sin\alpha - g t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} \sin\alpha$.

En remplaçant dans l'expression de $y(t)$, on trouve donc la hauteur maximale :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \boxed{18{,}2\ m}.$$

2.5 Quelle est la distance horizontale parcourue par Maddison durant son saut ?

La distance horizontale parcourue est la distance pour laquelle la position verticale revient à 0.

$$\Rightarrow 0 = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{g t^2}{2}$$

↳ Une première solution est $t = 0$ → à rejeter (correspond à la position initiale).

Si $t \neq 0$:

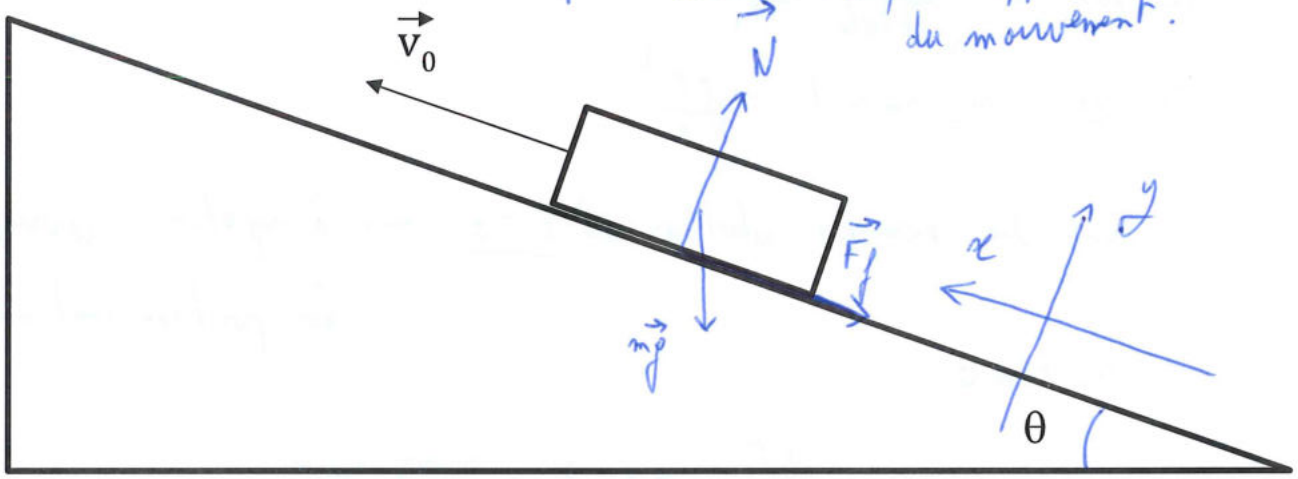
$$0 = v_0 \sin\alpha - \frac{g t}{2} \Rightarrow t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}.$$

En remplaçant dans l'expression de $x(t)$, on trouve la distance horizontale parcourue d :

$$x(t) = d = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) = \boxed{112\ \text{m}}.$$

$\vec{mg}$ ≡ poids
$\vec{N}$ ≡ réaction normale à la surface
$\vec{F_f}$ ≡ force de frottement dynamique (car mouvement), qui s'oppose au sens du mouvement.

Question 3 (10 points)



Soit un bloc de masse m sur un plan incliné d'angle θ. À l'instant initial t=0 on fournit une vitesse initiale v_0 au bloc, vers le haut du plan incliné. Le bloc va monter la pente jusqu'à l'instant t=T quand sa vitesse sera nulle.

Attention : Les réponses aux questions 3.2 à 3.5 seront formulées en fonction d'un ou de plusieurs paramètres de l'énoncé m , θ , v_0 , ainsi que des coefficients de frottements statique μ_S et dynamique μ_D.

3.1 Représenter sur le dessin les forces agissant sur le bloc à l'instant t=0.

3.2 Donner la norme de ces forces durant l'intervalle $T > t \geq 0$ pendant laquelle le bloc est en mouvement vers le haut.

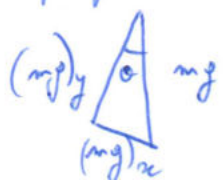
2e loi de Newton : $\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{a}$. (1)

On choisit un système d'axes (x, y) - cf schéma. (Rmq : ici, on a choisi l'axe x dans le sens du mouvement.)

Projection de (1) sur l'axe x : $-mg\sin\theta - F_f = -ma$ (2)

($F_f \equiv |\vec{F_f}|$, $a \equiv |\vec{a}|$) En effet, l'accélération est dirigée vers le bas de la pente.

Pour la projection de $\vec{mg}$, on a utilisé le triangle rectangle :



Projection de (1) sur l'axe y : $N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow |\vec{N}| = \boxed{N = mg\cos\theta}$.

De plus, on sait que $F_f = \mu_D \cdot N$ (frottement dynamique).

$$\Rightarrow \boxed{F_f = \mu_D mg\cos\theta}.$$

3.3 Le bloc va monter jusqu'à une hauteur maximale h. Quel est le temps T mis pour atteindre cette hauteur maximale ?

On injecte l'expression de F_f dans (2) $\Rightarrow mg\sin\theta + \mu_D mg\cos\theta = ma$.

$\Rightarrow a = g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)$ constante selon l'axe x.

$\Rightarrow$ Le bloc est en MRUAV. L'accélération s'oppose à la vitesse initiale $\vec{v}_0$.

$\Rightarrow v(t) = v_0 - at$. En particulier, à $t = T$, la hauteur est maximale et $v(T) = 0$.

$\Rightarrow v_0 - aT = 0 \Rightarrow T = \frac{v_0}{a}$.

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}}.$$

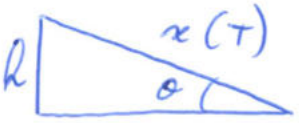
3.4 Quelle est la hauteur maximale h? Attention : la hauteur est mesurée dans la direction verticale !

Écrivons l'équation du mouvement selon l'axe x (c'est un MRUA) :

$x(t) = v_0 \cdot t - \frac{a t^2}{2}$. (En posant $x(0) \equiv 0$).

$\Rightarrow x(T) = v_0 T - \frac{a T^2}{2} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} - g\frac{(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}{2} \cdot \frac{v_0^2}{(g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta))^2}$

$\Rightarrow x(T) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}$. Pour trouver la hauteur h, on utilise le triangle rectangle :



$\rightarrow \sin\theta = \frac{h}{x(T)}$

$\Rightarrow h = x(T)\sin\theta = \boxed{\frac{v_0^2}{2g\left(1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}\right)}}$.

3.5 Quelle est l'énergie dissipée par la force de frottement au cours du mouvement (entre l'instant initial t=0 et l'instant t=T où le bloc atteint sa hauteur maximale) ?

Première méthode :

- À $t=0$, l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique :

$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$.

- À $t=T$, l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle puisque la vitesse est nulle :

$E_T = mgh = \frac{m v_0^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}} < \frac{m v_0^2}{2} \Rightarrow E_T < E_0$.

L'énergie dissipée par la force de frottement est donc la différence d'énergie mécanique entre $t=0$ et $t=T$:

$E_{diss} = E_0 - E_T = \frac{m v_0^2}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}}\right) = \frac{m v_0^2}{2} \cdot \left(\frac{\frac{\mu_D}{\tan\theta}}{1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{E_{diss} = \frac{m v_0^2}{2} \cdot \frac{\mu_D}{\mu_D + \tan\theta}}$.

Deuxième méthode : On calcule directement le travail de $\vec{F}_f$ pendant tout le mouvement. L'énergie dissipée par $\vec{F}_f$ est l'opposé de ce travail.

$$W = \int_{\text{pente}} \vec{F}_f \cdot d\vec{l} = \vec{F}_f \cdot \vec{d} \quad (\vec{F}_f \text{ est constante ; } \vec{d} \equiv x(T)\,\vec{u}_x \text{ est le déplacement total})$$

$$= -F_f \cdot x(T).$$

$$= -\mu_D\, mg\cos\theta \cdot \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}$$

$$= \frac{-\mu_D}{2(\tan\theta + \mu_D)}\, m v_0^2 .$$

$$\Rightarrow E_{diss} = -W = \boxed{\frac{m v_0^2}{2} \cdot \frac{\mu_D}{\tan\theta + \mu_D}}.$$

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2019-2020 - Examen de janvier 2020

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles** (4 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous n'avez pas droit à un aide-mémoire ou à une calculatrice.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées. Définissez soigneusement toutes les grandeurs que vous utilisez.**
9. L'examen dure **1h15 (75 minutes)**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3	Q4
/5	/10	/10	/10

1. (Toutes sections sauf Math-bio — 5 points) :

Définissez la poussée d'Archimède. Faites un schéma pour illustrer votre définition.

2. (Toutes sections — 10 points) :

Soit un système constitué de 2 particules de masses m_1, m_2 différentes ($m_1 \neq m_2$).

a) Est-il possible d'imaginer une situation dans laquelle l'énergie cinétique du système n'est pas nulle alors que sa quantité de mouvement est nulle ? Si oui, donnez un exemple et justifiez-le. Si non, expliquez pourquoi c'est impossible.

b) Est-il possible d'imaginer une situation dans laquelle le centre de masse du système est immobile, alors que son moment angulaire par rapport au centre de masse est non nul. Si oui, donnez un exemple et justifiez-le. Si non, expliquez pourquoi c'est impossible.

3. (Toutes sections — 10 points) :

Considérons une particule ponctuelle de masse m qui se meut dans l'espace à 3 dimensions, selon une trajectoire $\vec{x}(t)$, soumise à une force $\vec{F}(\vec{x}, t)$. À l'instant $t = t_0$ elle se trouve à la position $\vec{x}_0$, et à l'instant $t = t_1 > t_0$, elle se trouve à la position $\vec{x}_1$.

a) Définissez l'énergie cinétique de la particule à l'instant t.

b) Définissez le travail W effectué par la force $\vec{F}$ entre les instants $t = t_0$ et $t = t_1$.

c) Énoncez et démontrez le théorème de l'énergie cinétique pour cette particule ponctuelle. Faites particulièrement attention aux notations utilisées et aux étapes du calcul : toute expression incohérente mathématiquement sera sanctionnée.

4. (Toutes sections — 10 points) :

Soit un solide indéformable possédant un axe de symétrie, en rotation à la vitesse angulaire ω autour de cet axe.

Dans cette question, nous supposerons que ce solide est constitué de N points matériels A_i de masses m_i situés aux points $\vec{x}_i(t)$ de l'espace. Les points A_i sont animés d'une vitesse $\vec{v}_i(t)$ dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$.

Les forces internes sont telles que les distances entre les paires de points ne changent pas au cours du temps (définition du solide indéformable).

On supposera que le centre de masse du solide est immobile. On pourra prendre le centre de masse comme origine du référentiel inertiel $\mathcal{R}$. On peut montrer que, en vertu de la symétrie, le centre de masse est situé sur l'axe de rotation. Vous pouvez supposer ceci comme acquis.

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est le vecteur dont la norme vaut ω, dont la direction est donnée par l'axe de rotation (qui coïncide ici avec l'axe de symétrie), et dont le sens est donné par la « règle du tire-bouchon / de la main droite ».

Notons $\vec{L}_{CM}$ le vecteur moment cinétique par rapport au centre de masse.

On peut montrer que

$$\vec{L}_{CM} = I\vec{\omega} \ . \tag{1}$$

a) Comment s'appelle le facteur de proportionnalité I ?

b) Faire un schéma sur lequel vous indiquerez l'axe de symétrie, le vecteur $\vec{\omega}$, et les positions et vitesses d'au moins 2 points matériels constituant ce corps solide, ces points matériels étant symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe de rotation.

c) Donner la définition de I, c'est-à-dire une formule permettant de calculer I.

d) Démontrer la relation (1). N'oubliez pas d'utiliser le fait que le solide possède un axe de symétrie.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Exercices

Année 2019-2020 - Examen de janvier 2020

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **10 feuilles** (5 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
7. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
8. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
9. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
10. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
11. L'examen dure **2h (120 minutes)**.

Bon travail !

Correctif

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
/4	/7	/10	/10	/4



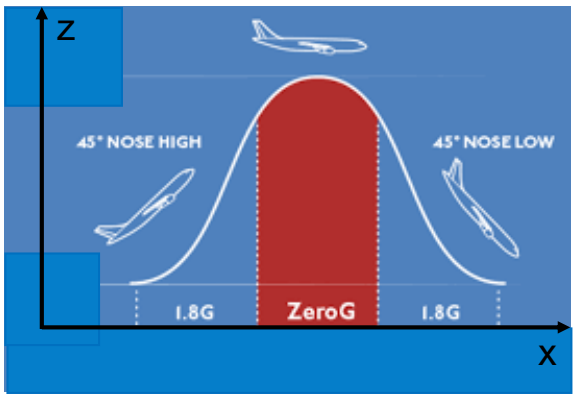


Fig. 1 – À gauche : avion au début d'un vol parabolique. À droite : schéma de la trajectoire lors d'un vol parabolique.

1. (Toutes sections — 4 points) :

Le principe du vol parabolique est pour un avion de reproduire pendant une durée aussi longue que possible une trajectoire la plus proche possible de la parabole décrite par un objet en chute libre, afin que les objets situés à l'intérieur de l'avion soient en état d'apesanteur.

Dans une expérience typique (voir le schéma), après un vol horizontal, il y a une phase de propulsion vers le haut durant laquelle les passagers ressentent une accélération d'environ $1{,}8\,g$ (où g est l'accélération de la pesanteur) ; ensuite la phase de vol parabolique dans laquelle les passagers ressentent une accélération très proche de $0\,g$ (en pratique on atteint approximativement $0{,}01\,g$) ; et finalement une phase de retour vers le vol horizontal durant laquelle les passagers ressentent de nouveau une accélération de $1{,}8\,g$.

Lors d'un vol typique, lorsque commence la trajectoire parabolique (début de la phase à $0\,g$), l'avion a une vitesse dont la norme est $530\,\text{km/h}$, et il vole avec une inclinaison de $45°$ par rapport à l'horizontale. Le vol parabolique finit lorsque l'inclinaison atteint $-45°$ par rapport à l'horizontale.

Déterminer la durée pendant laquelle l'état d'apesanteur est maintenu.

Réponse : *Pendant la phase de vol parabolique, l'avion suit la même trajectoire qu'aurait eu un objet en chute libre : autrement dit, il a une accélération $\vec{a} = g\,(-\vec{u}_z)$, dirigée vers le bas. À cause de ceci, les passagers, qui suivent le mouvement de l'avion, ressentent la même chose que dans une chute libre.*

L'avion fait initialement un angle de $45°$ avec l'horizontale. Cela signifie que sa vitesse initiale vaut $\vec{v}_0 = v_0\,(\cos 45°\,\vec{u}_x + \sin 45°\,\vec{u}_z) = v_0\left(\frac{\vec{u}_x}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{u}_z}{\sqrt{2}}\right)$, où $v_0 = 530\,\text{km/h}$.

On recherche le temps T pour que l'inclinaison soit de $-45°$. À ce moment, la vitesse vaut $v(T) = v_0\left(\frac{\vec{u}_x}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{u}_z}{\sqrt{2}}\right)$, puisque la composante x est constante (pas d'accélération selon x) et la trajectoire est parabolique (donc symétrique). Puisque le mouvement est un MRUA selon z, on peut donc écrire l'équation :

$$v_z(T) = v_{0z} - gT = -v_{0z} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2v_{0z}}{g} = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} = \boxed{21{,}2\,\text{s}}.$$

Erreurs fréquentes :

- *La difficulté principale de cette question résidait dans la modélisation de la trajectoire. Beaucoup d'étudiants n'ont pas su comment traiter le problème, par manque de visualisation de la trajectoire.*
- *De même, certains ont essayé de décrire la phase de propulsion alors que ce n'était pas nécessaire, ou ont utilisé la valeur de $0{,}01\,g$ (en se mettant dans le référentiel des passagers, mais en oubliant de changer de référentiel pour utiliser les expressions de la vitesse).*

2. (Toutes sections — 7 points) :

Une barre de fer de section variable et de longueur 2 m a une masse linéique dont la dépendance en la position peut être approximée par l'expression :

$$\lambda(x) = a + bx + cx^2 \tag{1}$$

pour $0 \leq x \leq 2$ m, avec $a = 0{,}3\,\mathrm{kg/m}$, $b = 0{,}1\,\mathrm{kg/m^2}$, $c = -0{,}06\,\mathrm{kg/m^3}$. (Notez la valeur négative du coefficient c.)

a) Une masse linéique ne peut jamais être négative. Montrer que $\lambda(x)$ est positive pour $0 \leq x \leq 2\,\mathrm{m}$.

b) Quelle est la masse de la barre ?

c) Quelle est la position x_{CM} du centre de masse de la barre ?

Réponse :

a) Il faut vérifier que $\lambda(x) > 0 \;\; \forall x \in [0, l]$ (où $l \equiv 2\,\mathrm{m}$). Pour ce faire, remarquons d'abord que les deux valeurs aux limites du domaine sont positives : $\lambda(0) = a > 0$ et $\lambda(l) = 0{,}06\,\mathrm{kg/m} > 0$. Il reste à calculer les racines : si elles sont situées en dehors de l'intervalle $[0, l]$, c'est que $\lambda(x)$ ne devient négative qu'en dehors de cet intervalle, ce qui est ce qu'on veut montrer. En résolvant l'équation du second degré, les racines sont en

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = -1{,}55\,\mathrm{m} \;\; ou \;\; 3{,}22\,\mathrm{m}.$$

Comme ces deux valeurs sont en dehors de l'intervalle, on en déduit que $\lambda(x)$ est bien positive sur toute la barre.

b) La masse est l'intégrale de la masse linéique sur toute la barre. Notez que la paramétrisation de l'élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ est évidente ici ($\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x$, x prenant des valeurs entre 0 et l) car on paramétrise une ligne droite. Le calcul donne donc :

$$m = \int_{barre} \lambda(x)\,\mathrm{d}\ell = \int_0^l \lambda(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l (a + bx + cx^2)\,\mathrm{d}x = al + b\,\frac{l^2}{2} + c\,\frac{l^3}{3} = \boxed{0{,}64\,\mathrm{kg}}.$$

c) On utilise la même paramétrisation qu'au point précédent. À partir de la définition du centre de masse d'un objet ayant une répartition continue linéique de masse, on obtient :

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int_{barre} \lambda(x)\,x\,\mathrm{d}\ell = \frac{1}{m}\int_0^l (ax + bx^2 + cx^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\left(a\,\frac{l^2}{2} + b\,\frac{l^3}{3} + c\,\frac{l^4}{4}\right) = \boxed{0{,}98\,\mathrm{m}}.$$

Erreurs fréquentes :

- *Beaucoup de réponses n'étaient pas assez rigoureuses pour la première sous-question, en ne prenant que quelques valeurs sur l'intervalle plutôt que de calculer les racines et de regarder les valeurs aux bords.*
- *Beaucoup de personnes ont mal modélisé l'intégrale, notamment en confondant la variable d'intégration et les bornes, ou en oubliant carrément de préciser les bornes. Rappelons que ces grandeurs se calculent par des intégrales définies et pas des primitives !*
- *On se rend compte que la notion même d'intégrale n'est pas assez maîtrisée, autant au niveau du concept (une somme d'éléments infinitésimaux) qu'au niveau du calcul. Cela se manifeste par beaucoup de réponses qui contiennent uniquement la formule générale (probablement recopiée d'un rappel de TP) sans la particulariser à la situation physique (une barre de longueur l, etc).*

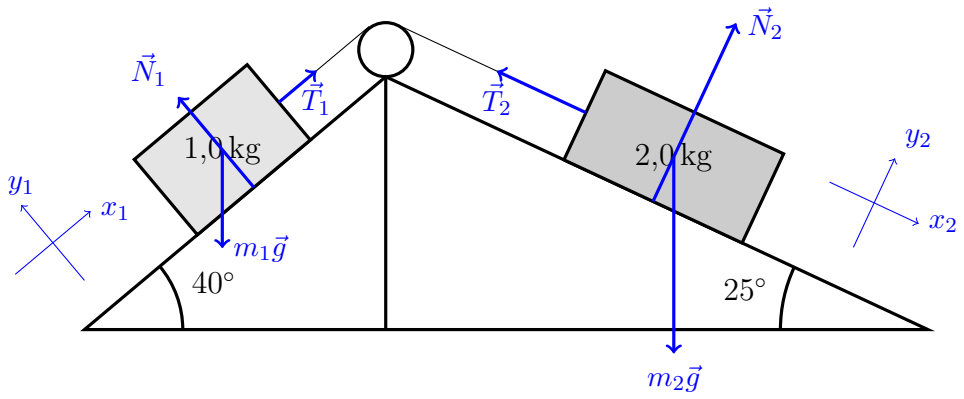


Fig. 2 – Deux blocs sur deux plans inclinés, reliés par une poulie.

3. (Toutes sections — 10 points) :

Considérons deux masses de 1,0 kg et 2,0 kg reliées par un câble inextensible passant par une poulie, et posées sur deux plans inclinés à 40° et 25° respectivement (voir schéma).

Initialement les masses sont immobiles.

On négligera tous les frottements. Le câble est supposé avoir une masse négligeable.

a) Lorsqu'on lâche le système sans vitesse initiale, celui-ci se met en mouvement. Dans quel sens le déplacement se fait-il (c'est-à-dire quel bloc monte et quel bloc descend) ? Justifiez votre réponse.

b) Si on néglige la masse de la poulie, quelle sera l'accélération a des masses ?

c) Tenons compte maintenant de la masse de la poulie. On suppose qu'elle a un moment d'inertie $I = 5 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$ et un rayon de $R = 5\,\mathrm{cm}$. On supposera que le câble ne glisse pas au contact de la poulie.
Déterminer un système d'équations permettant de trouver la tension T_1 dans la partie du câble entre la masse de 1kg et la poulie, la tension T_2 dans la partie du câble entre la masse de 2,0 kg et la poulie, et l'accélération a des masses.

d) Résoudre les équations obtenues au point c) et déterminer l'accélération a des masses.

Réponse : *Pour des raisons pratiques et pédagogiques, on préfèrera répondre d'abord au point b) avant le point a).*

b) Puisqu'on néglige la masse de la poulie, on néglige son moment d'inertie (qui est proportionnel à la masse). Cela implique que la tension est la même partout dans le câble.

Commençons par représenter les forces en présence sur chacune des deux masses :

- *Sur la masse $m_1 \equiv 1{,}0\,\mathrm{kg}$, on a trois forces : le poids $m_1\vec{g}$, dirigé vers le bas, la réaction normale à la surface $\vec{N}_1$ perpendiculaire à la surface, et la tension dans le câble $\vec{T}_1$ dirigée selon le câble.*
- *De façon similaire, sur la masse $m_2 \equiv 2{,}0\,\mathrm{kg}$, on a aussi trois forces : $m_2\vec{g}$, $\vec{N}_2$ et $\vec{T}_2$.*

On reporte ces forces sur le schéma. Comme expliqué plus haut, les normes des tensions sont égales : $\left|\vec{T}_1\right| \equiv T_1 = T_2 \equiv \left|\vec{T}_2\right|$ (mais $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$!). De plus, comme les deux masses bougent ensemble (reliées par un câble inextensible), la norme de leur accélération est la même : $a_1 = a_2$.

Écrivons la deuxième loi de Newton pour chacune des deux masses :

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 &= m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 &= m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Projetons chacune de ces équations sur un axe dirigé dans le sens de la pente, vers la droite. On fait le choix de ce système d'axes car il permet de ne devoir regarder qu'une seule projection, puisqu'on n'a pas besoin de l'autre (puisqu'on néglige les frottements, on n'a pas besoin de connaître la force normale). Notez que le système d'axes n'est pas le même pour les deux masses, mais ce n'est pas un problème puisqu'on exprime le système uniquement en termes des normes des deux forces.

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\theta_1 + T &= m_1 a \\ m_2 g \sin\theta_2 - T &= m_2 a \end{cases}$$

On a appelé $\theta_1 \equiv 40°$ et $\theta_2 \equiv 25°$. On a noté a l'accélération des deux masses, en faisant la supposition qu'elle est dirigée vers la droite (c'est-à-dire que m_1 monte et m_2 descend). Si on trouve un signe négatif pour a, c'est que cette supposition n'était pas vraie et qu'on devra réécrire le système avec $-a$ à la place de a.
On a un système de deux équations à deux inconnues : T et a. On le résout en commençant par isoler T dans l'une des deux équations, par exemple la première :

$$T = m_1 (a + g \sin\theta_1).$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on trouve :

$$m_2 g \sin\theta_2 - m_1 (a + g \sin\theta_1) = m_2 a.$$

Après simplifications, cela donne :

$$a = g \left(\frac{m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1}{m_1 + m_2} \right) = \boxed{0{,}66\,\mathrm{m/s^2}}.$$

a) *Puisque le signe trouvé à la réponse précédente est positif, cela signifie que notre supposition était correcte et que le déplacement se fait vers la droite.*

c) *Les équations vectorielles écrites plus haut restent valables. Cependant, cette fois, les tensions ne sont plus égales à gauche et à droite de la poulie ($T_1 \neq T_2$). La projection sur le même système d'axes qu'au point b) donne donc :*

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\theta_1 + T_1 &= m_1 a \\ m_2 g \sin\theta_2 - T_2 &= m_2 a \end{cases}$$

On a donc deux équations, mais trois inconnues (a, T_1 et T_2) : il faut une équation supplémentaire. On va utiliser l'équation pour la somme des moments de force s'exerçant sur la poulie. Il y a 4 forces s'exerçant sur la poulie : les tensions dans les cordes à gauche et à droite $-\vec{T}_1$ et $-\vec{T}_2$ (par principe d'action-réaction), son poids $m_p\vec{g}$, et une force de réaction du support de la poulie $\vec{F}_R$ qui permet de la maintenir droite. Les moments de ces deux dernières forces par rapport au centre de la poulie sont nuls (car ces deux forces s'appliquent au centre de la poulie). On a donc, en termes de l'accélération angulaire de la poulie $\vec{\gamma}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{T}_1} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{T}_2} = I\vec{\gamma}.$$

Calculons les moments de force : en utilisant la règle de la main droite pour déterminer la direction, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{T}_1} = RT_1\vec{u}_z,$$

où l'axe z sort de la feuille. De façon similaire, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{T}_2} = -RT_2\vec{u}_z.$$

Remarquons que puisque le système se déplace vers la droite, l'accélération angulaire de la poulie est dirigée selon un axe entrant dans la feuille : $\vec{\gamma} = -\gamma\vec{u}_z$. Comme le

câble ne glisse pas au contact de la poulie, la poulie a la même accélération que le reste du système et on peut relier l'accélération à l'accélération angulaire par $\gamma = a/R$. On a donc :

$$RT_1\vec{u}_z - RT_2\vec{u}_z = -I\frac{a}{R}\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = -I\frac{a}{R^2}.$$

En combinant, on a le système de trois équations demandé, en termes des trois inconnues T_1, T_2 et a :

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\theta_1 + T_1 &= m_1 a \\ m_2 g\sin\theta_2 - T_2 &= m_2 a \\ T_1 - T_2 &= -I\frac{a}{R^2} \end{cases}$$

d) Pour résoudre ce système, on remarque qu'on peut éliminer les inconnues T_1 et T_2 en soustrayant les deux premières équations de la dernière :

$$\begin{aligned} & m_1 g\sin\theta_1 - m_2 g\sin\theta_2 = -I\frac{a}{R^2} - m_1 a - m_2 a \\ \Rightarrow \quad & a\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) = g\,(m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1) \\ \Rightarrow \quad & a = g\,\frac{m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \boxed{0{,}62\,\mathrm{m/s^2}}. \end{aligned}$$

Erreurs fréquentes :

- *Beaucoup d'erreurs dès le début de la résolution, dans la modélisation du problème : des personnes indiquent une "force motrice" vers la droite, qui n'a aucune origine physique, oublient des forces, ou se trompent de direction pour certaines forces.*
- *Un certain nombre de personnes ont cru la situation statique, ou n'ont pas remarqué que les normes des accélérations des deux masses étaient identiques.*
- *La deuxième loi de Newton n'est souvent pas écrite correctement : beaucoup écrivent des "projections" sans savoir quelle équation ils projettent. Il est important de toujours d'abord identifier la loi physique, vectorielle dans ce cas, et d'employer un raisonnement systématique.*
- *On rencontre encore beaucoup de confusions entre vecteurs, normes, projections etc. Ces notions sont vues dans les premières séances de l'année et doivent être maîtrisées à ce stade.*
- *Beaucoup d'étudiants font l'erreur de considérer un seul système constitué des deux blocs. Le problème est que ce système n'est pas un corps rigide car les deux blocs ont un mouvement relatif entre eux. Les relations que l'on a vues au cours ne sont pas valables en général pour des corps non rigides.*
- *Même parmi les meilleures copies, une erreur fréquente est d'oublier de regarder la direction du vecteur accélération angulaire : beaucoup n'ont pas pensé à faire une projection et ont, probablement sans s'en rendre compte, supposé que ce vecteur était sortant. Cette erreur était cependant évitable en regardant la réponse finale : avec cette supposition, on aurait trouvé une accélération plus grande qu'au point b), ce qui n'est pas logique (intuitivement, on se doute qu'augmenter la masse de la poulie réduira l'accélération du système).*
- *Même parmi les meilleures copies, la résolution du système d'équations est souvent laborieuse. Il faut s'entraîner à avoir une méthode systématique de résolution, car beaucoup de problèmes physiques se ramènent à un système d'équations à résoudre.*

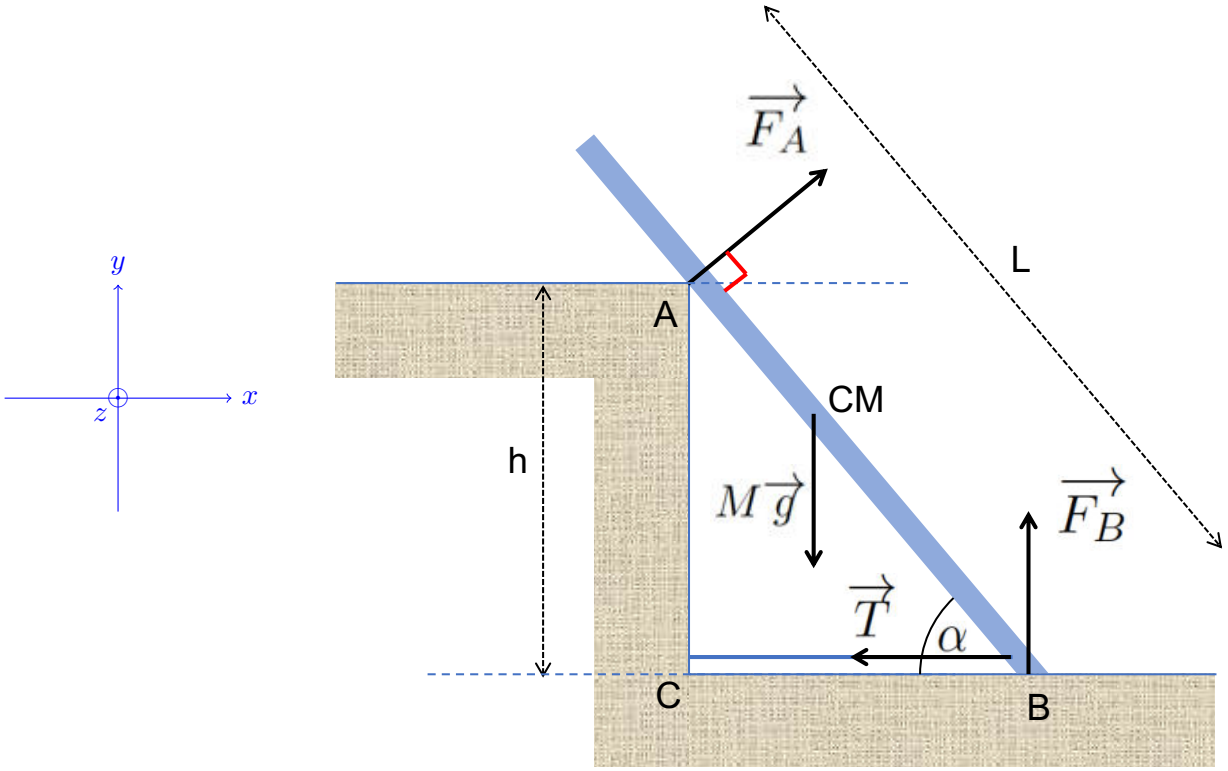


Fig. 3 – Une échelle posée contre un mur.

4. (Toutes sections — 10 points) :

Une échelle de longueur L et de masse M est adossée à un mur vertical au point A. Elle s'appuie sur le sol en B. Elle forme avec le sol horizontal un angle α ($0 < \alpha < \pi/2$). Le point A est à une hauteur h du sol.

Les deux forces aux points de contact avec le mur et le sol sont notées $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ respectivement. On supposera que $\overrightarrow{F_B}$ est perpendiculaire au sol, et $\overrightarrow{F_A}$ perpendiculaire à l'échelle, comme indiqué sur la figure.

L'échelle est supposée homogène, et son centre de masse est donc au milieu de l'échelle.

Ces 3 forces seules ne peuvent pas réaliser l'équilibre. On a donc attaché la base B de l'échelle au bas du mur (au point C) par un câble dont la tension est $\overrightarrow{T}$.

Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, les normes des forces $\overrightarrow{F_A}$, $\overrightarrow{F_B}$, et de la tension $\overrightarrow{T}$ dans le câble.

Réponse : *Comme on a trois inconnues (les normes des trois forces), on a besoin de trois équations. Deux de ces équations seront données par la deuxième loi de Newton ($\sum \vec{F} = \vec{0}$ car situation statique), projetée sur les axes x et y (représentés à côté de la figure), et la troisième sera donnée par l'équation pour la somme des moments de force ($\sum \overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{0}$).*

Il y a 4 forces qui s'exercent sur le système qu'on considère, à savoir l'échelle : $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $M\vec{g}$ et $\vec{T}$. La deuxième loi de Newton (pour exprimer que la situation est statique) s'écrit donc comme :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + M\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Il faut projeter cette équation sur les axes x et y. Cette projection est triviale, sauf pour la force $\vec{F}_A$, pour laquelle il faut déterminer l'angle fait avec l'horizontale. Comme l'angle formé à droite entre l'échelle et la surface horizontale est α (par construction) et que $\vec{F}_A$ est perpendiculaire à l'échelle, on a que cet angle vaut $180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$. La projection

de (2) sur l'axe x donne donc :

$$F_A \cos(90° - \alpha) + 0 + 0 - T = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A \sin\alpha = T. \tag{3}$$

De même, la projection selon y donne :

$$F_A \sin(90° - \alpha) + F_B - Mg + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A \cos\alpha + F_B = Mg. \tag{4}$$

*Regardons à présent les moments de force. Puisque la situation est statique, on peut choisir le point de référence pour calculer les moments : on choisit le point **B**, puisqu'il permet d'annuler deux inconnues (le moment de $\vec{T}$ et de $\vec{F}_B$ est nul puisque ces deux forces s'appliquent en B).*
Calculons le moment de force du poids $M\vec{g}$: la force s'exerce au milieu de l'échelle, à une distance $L/2$ du point B. L'angle formé entre le vecteur déplacement du point B au CM et le vecteur force est de $90° - \alpha$. La norme du moment de force vaut donc $Mg\frac{L}{2}\sin(90° - \alpha)$. Par la règle de la main droite, on trouve que ce moment de force est sortant (va en $+\vec{u}_z$).
Pour le moment de force de $\vec{F}_A$, il faut remarquer que la force s'applique à une distance $|AB|$ du point B, perpendiculairement. Cette distance $|AB|$ se trouve à l'aide du triangle rectangle ABC : on a que

$$\sin\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad |AB| = \frac{|AC|}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

En utilisant également la règle de la main droite, on trouve que le moment de force de $\vec{F}_A$ vaut $F_A\frac{h}{\sin\alpha}(-\vec{u}_z)$.
Finalement, l'équation pour les moments de force donne :

$$Mg\frac{L}{2}\sin(90° - \alpha) - F_A\frac{h}{\sin\alpha}\vec{u}_z = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{LMg}{2}\cos\alpha - F_A\frac{h}{\sin\alpha} = 0. \tag{5}$$

Les trois équations (3), (4) et (5) forment un système de trois équations à trois inconnues, qu'il nous suffit de résoudre. Tout d'abord, remarquons que l'équation (5) donne immédiatement :

$$\boxed{F_A = \frac{L}{2h}Mg\sin\theta\cos\theta}.$$

En remplaçant dans (3), on trouve :

$$\boxed{T = \frac{L}{2h}Mg\sin^2\theta\cos\theta}.$$

Finalement, en remplaçant ces deux résultats dans (4), on trouve :

$$\boxed{F_B = Mg\left(1 - \frac{L}{2h}\sin\alpha\cos^2\alpha\right)}.$$

Erreurs fréquentes :

- *Les mêmes difficultés fondamentales pour la question 3 se reportaient souvent sur la question 4 : lois physiques pas clairement exprimées, notions floues pour les composantes des vecteurs,...*
- *L'équation avec les moments de force est souvent oubliée, ou traitée de façon incorrecte. Il s'agit d'une matière importante, à bien travailler en séance.*
- *En particulier, beaucoup ne comprennent pas que le moment de force est vectoriel, et n'est pas compris dans le plan xy.*
- *On voit beaucoup d'erreurs (de distraction ?) sur les angles utilisés, lors des projections ou pour calculer les moments. En cas de doute, vérifiez toujours vos résultats avec des comportements limites (par exemple, si α devient nul, on s'attend à ce que $\vec{F}_A$ soit dirigé uniquement selon y).*
- *Une autre erreur fréquente est de mal identifier le bras de levier (distance au point d'application) pour la force $\vec{F}_A$: beaucoup d'étudiants ont pris L comme distance, ce qui n'est évidemment pas correct.*



Fig. 4 – Un manège.

5. (Toutes sections sauf Math-Bio — 4 points) :

Un manège (voir figure) de rayon $R = 3\,\text{m}$ est libre de tourner autour de son axe.

À l'instant $t = 0$ le manège a une vitesse angulaire $\omega(t = 0) = 0{,}2\,\text{rad/s}$ et sa vitesse angulaire diminue selon $\frac{\text{d}\omega}{\text{d}t}(t = 0) = -0{,}02\,\text{rad/s}^2$.

Un enfant s'est mis au bord du manège. À l'instant $t = 0$, l'enfant lance une balle de masse $m = 100\,\text{g}$ à un angle de 60° avec la tangente au cercle (voir dessin page suivante). Dans le référentiel du manège, la vitesse de la balle est $v = 3\,\text{m/s}$.

Un observateur au centre du manège, qui tourne avec le manège, voit cette balle affectée par plusieurs « pseudo-forces » dont la résultante est donnée par l'expression :

$$\vec{F}_{ie} = -m\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \times \overrightarrow{r(t)} - 2m\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{v(t)} - m\overrightarrow{\omega(t)} \times \left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right), \tag{6}$$

où $\overrightarrow{r(t)}$ et $\overrightarrow{v(t)}$ sont les vecteurs position et vitesse de la balle tels que mesurés par l'observateur. Les 3 termes dans cette expression sont appelés « pseudo-force d'Euler », « pseudo-force de Coriolis », et « pseudo-force centrifuge ».

a) Donner la norme des 3 pseudo-forces de l'équation (6) à l'instant $t = 0$, juste après que le garçon a lancé la balle.

b) Choisir une échelle appropriée (par exemple —mais celle-ci n'est pas appropriée pour un dessin correct— 1N/mm) et représenter ces 3 pseudo-forces sur le dessin de la page suivante.

Réponse :

a) Calculons la norme des 3 pseudo-forces (sans s'occuper des directions pour le moment) :

— *Pseudo-force d'Euler* $-m\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \times \overrightarrow{r(t)}$ *: comme* $\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt}$ *est orienté selon l'axe z (voir système d'axes sur la figure), perpendiculaire à la feuille (selon l'axe de rotation du manège) et que* $\overrightarrow{r(t)}$ *est à tout instant dans le plan de la feuille,* $\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \perp \overrightarrow{r(t)}$*. Le sinus de l'angle entre les deux vecteurs vaut donc* 1*. La norme du produit vectoriel vaut donc :*

$$\left|-m\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \times \overrightarrow{r(t)}\right|_{t=0} = m\left|\frac{\text{d}\omega}{\text{d}t}(t = 0)\right| \cdot R \cdot 1 = \boxed{0{,}006\,\text{N}}.$$

En effet, en $t = 0$*,* $r(0) = R\vec{u}_y$ *donc* $|r(0)| = R$*.*

— *Pseudo-force de Coriolis* $-2m\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{v(t)}$ *: de manière similaire à la pseudo-force d'Euler,* $\overrightarrow{\omega(t)}$ *est dirigé selon l'axe de rotation, dans la direction* z*, alors que la vitesse de la balle* $\overrightarrow{v(t)}$ *reste comprise dans le plan* xy*. Le sinus de l'angle entre les deux vecteurs vaut donc* 1*. La norme du produit vectoriel vaut donc :*

$$\left|-2m\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{v(t)}\right|_{t=0} = 2m\omega(t=0)v \cdot 1 = \boxed{0{,}12\,\mathrm{N}}.$$

— *Pseudo-force centrifuge* $-m\overrightarrow{\omega(t)} \times \left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right)$ *: une fois de plus,* $\overrightarrow{\omega(t)} \perp \overrightarrow{r(t)}$ *; et évidemment* $\left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right) \perp \overrightarrow{\omega(t)}$ *puisque le résultat d'un produit vectoriel entre deux vecteurs est perpendiculaire à chacun de ces vecteurs. Le sinus de l'angle pour chaque produit vectoriel vaut donc* 1 *et la norme du produit vectoriel est donnée par le produit des normes :*

$$\left|-m\overrightarrow{\omega(t)} \times \left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right)\right|_{t=0} = m\omega^2(t=0)R \cdot 1 = \boxed{0{,}012\,\mathrm{N}}.$$

b) Pour représenter les forces, il faut trouver leur direction par la règle de la main droite.

— *Pseudo-force d'Euler : en* $t = 0$*,* ω *va en* $-\vec{u}_z$ *puisque le manège tourne dans le sens horlogique. L'accélération angulaire* $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ *lui est opposée (signe* $-$*) et va donc en* $+\vec{u}_z$*. Par la règle de la main droite, le produit vectoriel* $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ *va selon* $\vec{u}_z \times \vec{u}_y = -\vec{u}_x$*. En prenant en compte le signe* $-$ *dans l'expression, la pseudo-force d'Euler va donc selon* $+\vec{u}_x$*.*

— *Pseudo-force de Coriolis : on sait immédiatement que cette pseudo-force sera perpendiculaire à* $\vec{v}$ *et dans le plan* xy*; il reste à déterminer si elle va vers la gauche ou vers la droite. Par la règle de la main droite, un raisonnement similaire au point précédent permet de se convaincre que la pseudo-force sera dirigée vers la gauche.*

— *Pseudo-force centrifuge : la direction est en*

$$-\left((-\vec{u}_z) \times \left((-\vec{u}_z) \times \vec{u}_y\right)\right) = \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y.$$

Les forces sont représentées en rouge sur la figure 5, avec le choix d'échelle $1\,\mathrm{cm} \leftrightarrow 0{,}012\,\mathrm{N}$*.*

Erreurs fréquentes :

— *Le but de cette question était de tester si vous étiez capables d'utiliser des relations données pour une application particulière. Aucune relation physique n'était requise en dehors de celle donnée dans l'énoncé. Beaucoup d'étudiants n'ont pas su comment répondre à cette question, se bloquant sur la réputation "difficile" de cette partie du cours, alors que tous les éléments pour répondre étaient dans l'énoncé.*

— *Les produits vectoriels ne sont souvent pas bien maîtrisés. Il fallait notamment remarquer que les vecteurs qui intervenaient dans les calculs étaient tous perpendiculaires.*

— *Une norme est positive ; attention à ne pas laisser des signes dans le calcul des normes.*

— *Il y a eu beaucoup d'erreurs dans les directions des pseudo-forces, notamment à cause de la direction de la vitesse angulaire qui n'a pas toujours été correctement modélisée.*

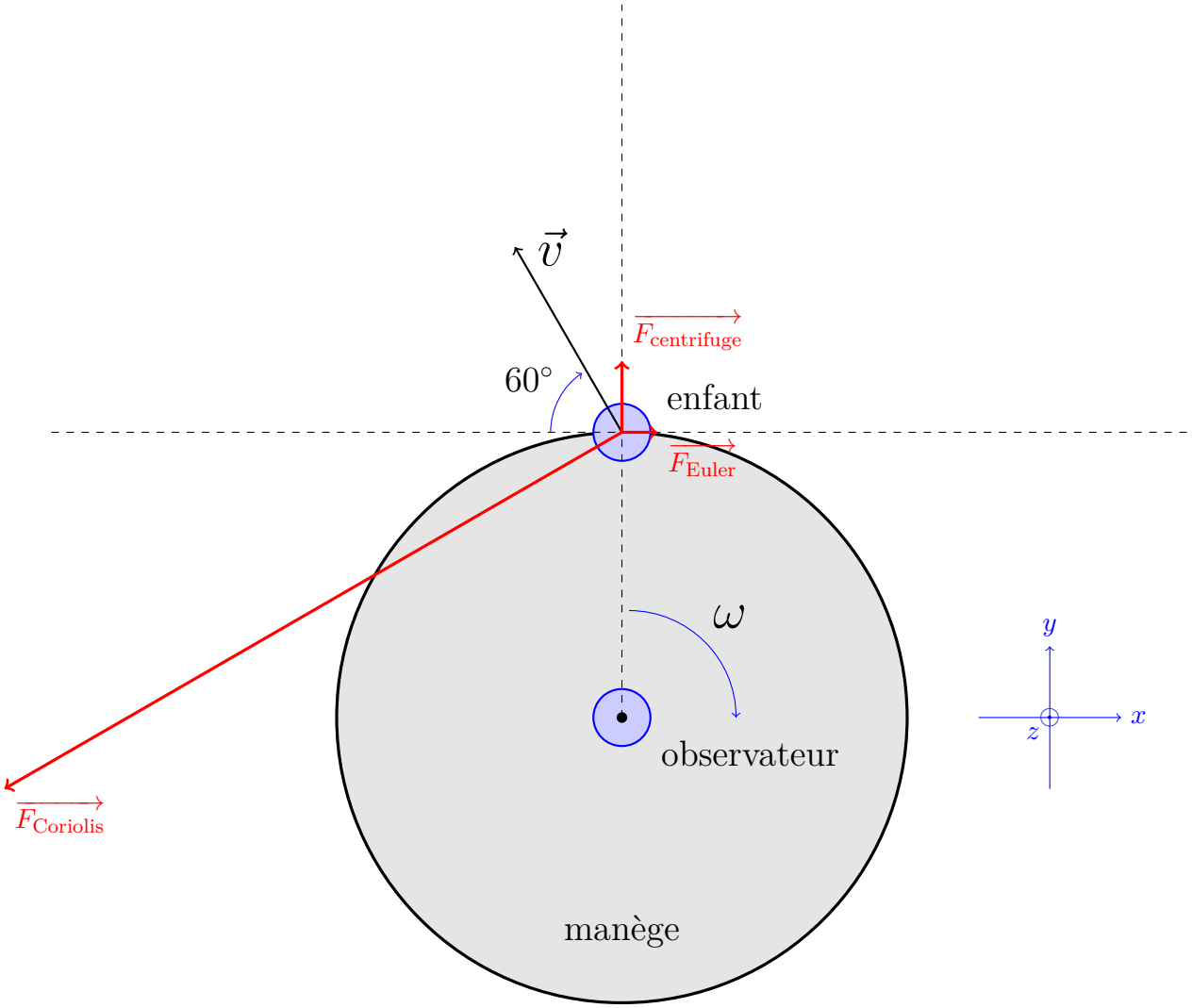


Fig. 5 – Enfant au bord d'un manège en rotation ayant lancé une balle à un angle de 60° de la tangente au manège.

Th. 1 : /3	Th. 2 : /3	Ex. 1 : /4	Ex. 2 : /5	Ex. 3 : /5	Total : /20

Interro du 30 octobre 2020

Durée : 2 heures

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles** (5 questions).
3. Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. (NB : pour cette interro : les questions concernent toutes les sections)
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
9. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   — Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9.81$ m s^{-2}
   — Constante de la gravitation universelle : $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
10. L'examen dure **2h (120 minutes)**.

Bon travail !

Théorie 1 (Toutes sections - 3 points)

1) Ecrire l'expression des vecteurs de base (vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$) en coordonnées polaires, en fonction des vecteurs de base en coordonnées cartésiennes ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$). Inclure un schéma. (1 point)
2) En déduire l'expression de la dérivée par rapport au temps de $\vec{u}_\rho$ et de $\vec{u}_\theta$, en fonction de $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ et la vitesse angulaire ω. (1 point)
3) A partir de l'expression des composantes du vecteur position $\vec{r}$ en coordonnées polaires, en déduire les expressions des composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires. (1 point)

Corrigé :

1) Slide p 43
2) Slide p 43 (et éventuellement p 44)
3) Slide p 45 ou 48 (vitesse) et p48 (accélération)

Théorie 2 (Toutes sections - 3 points)

Montrez que l'énergie cinétique d'un système de particules i, $1 < i < n$, peut être décomposée en deux termes (2ème théorème de König). Expliquez ce que représentent ces deux termes. Inclure un schéma (3 points).

Corrigé :

Slide p 151
(ou Syllabus Chapitre VI, Section 6.4, p 10 et 11
ou Benson 1. Mécanique, p 358)

Exercice 1 (Toutes sections - 4 points)

Un projectile de masse m est lancé verticalement à partir de la surface de la Terre (masse M_T, rayon R_T). On néglige la rotation terrestre et la résistance de l'air.

1) Définissez la vitesse de libération v_{lib} et déterminez son expression algébrique (=littérale) à partir des données. (2 points)
2) Le projectile est maintenant lancé à la vitesse v_{lib}/N, avec $N > 1$. Trouvez l'expression littérale (=algébrique) de l'altitude maximale h atteinte par le projectile, en fonction de R_T et N. (2 points)

Corrigé :

1) La vitesse de libération est la vitesse minimale à communiquer au projectile pour qu'il s'échappe de l'attraction gravitationnelle terrestre.
La force gravitationnelle est conservative. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique.
Au décollage à $r = R_T$:
$U = -G\frac{mM_T}{R_T}$
$E_c = \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2$

A l'infini :
$U = 0$
$E_c = 0$ par définition de la vitesse de libération.
En égalant :
$-G\frac{mM_T}{R_T} + \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 = 0 + 0$
Donc $v_{\text{lib}} = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}}$

2) L'équation de conservation de l'énergie mécanique devient :
$-G\frac{mM_T}{R_T} + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{\text{lib}}}{N}\right)^2 = -G\frac{mM_T}{(R_T+h)}$
$-G\frac{mM_T}{R_T} + \frac{1}{2}m\frac{1}{N^2}2\frac{GM_T}{R_T} = -G\frac{mM_T}{(R_T+h)}$
$\frac{-1}{R_T} + \frac{1}{N^2R_T} + \frac{1}{(R_T+h)} = 0$
$h = \frac{R_T}{N^2-1}$

Exercice 2 (Toutes sections - 5 points)

Arsène Lupin doit s'échapper d'un château. Il dispose d'une corde pouvant soutenir une force maximale de 740 N. La masse d'Arsène est de 80 kg. En glissant, Arsène exerce donc une traction T sur la corde (ne considérez pas les frottements entre Arsène et la corde ; ils sont inclus dans T).

1) Arsène se laisse glisser verticalement du haut du donjon, suspendu à sa corde attachée au sommet du donjon. Quelle accélération doit avoir Arsène pour que la corde ne se rompe pas ? (2 points)
2) Arsène se retrouve maintenant au sommet d'un toit (plan incliné) du château et veut s'en échapper en glissant le long du toit, retenu par sa corde attachée maintenant au sommet de ce toit. La pente du toit du château fait un angle $\alpha = 80°$ avec l'horizontale. Le coefficient de frottement cinétique entre Arsène et le toit vaut $\mu_c = 0.1$.
   a) Quelle accélération doit avoir Arsène en glissant sur le toit pour que la corde ne se rompe pas ? (2 points)
   b) Votre expression littérale (=algébrique) de l'accélération obtenue à la question 2)a) est-elle plausible ? Justifiez cela (i) par une analyse dimensionnelle et (ii) en considérant une valeur particulière de α. (1 point)

Corrigé :

1) Soit T la tension exercée par la corde sur Arsène. On applique la 2ème loi de Newton au système Arsène dans le référentiel du château supposé inertiel. Si on projette sur un axe vertical orienté positivement vers le bas : $mg - T = ma$
avec $T < T_{\max} = 740\text{N}$.
donc $a > a_{\min} = g - \frac{T_{\max}}{m}$
A.N. : $a_{\min} = 0.56$ m. s^{-2}

2) a) On applique la 2ème loi de Newton au système Arsène de masse m. En projetant sur (Ox), axe dirigé selon la pente du toit et orienté positivement vers le bas :
$-F_{f,c} - T + mg\sin(\alpha) = m\ddot{x}$

En projetant sur (Oy), axe perpendiculaire à (Ox) et orienté positivement vers le haut :
$N - mg\cos(\alpha) = 0$

Comme le frottement est cinétique, $F_{f,c} = \mu_c N = \mu_c mg\cos(\alpha)$.

$m\ddot{x} = -\mu_c mg\cos(\alpha) - T + mg\sin(\alpha)$

$T < T_{\max} = 740\text{N}$ donc :

$a = \ddot{x} > -\mu_c g\cos(\alpha) - \frac{T_{\max}}{m} + g\sin(\alpha)$
A.N. : $a_{\min} = 0.24$ m/s^{-2}

b) Les dimensions sont bien homogènes :
- Accélération : [a] = m. s^{-2}
- Coefficient de frottement cinétique, cosinus et sinus : sans dimension.
- $[g]$ =m . s^{-2}
- $[T/m]$ = N/kg = m . s^{-2}

Si $\alpha = \pi/2$ on retrouve la solution du point 1).

Exercice 3 (Toutes sections - 5 points)

Une chaîne flexible de longueur L et de masse M glisse sur une table sans frottement. Initialement, une longueur y_0 de la chaîne pend verticalement à partir de l'arête de la table. On note $y(t)$ la longueur de portion de la chaîne qui pend à l'instant t.

1) Quelle est la masse $m(t)$ de la portion pendante de la chaîne à un instant quelconque, en fonction des données de l'énoncé ? (1 point)

2) Etablissez une relation liant $y(t)$, la portion pendante de la chaîne à un instant t quelconque, au module de l'accélération subie par la chaîne à cet instant. (2 points)
   Indication : Vous pourrez considérer le système constitué de la chaîne, lui appliquer la 2ème loi de Newton, et projeter sur un axe vertical. Par ailleurs, notez que la portion de chaîne horizontale n'a pas de composante verticale d'accélération.

3) La relation obtenue au point 2) est-elle plausible ? Considérez deux cas extrêmes pour justifier votre réponse. (1 point)

4) Calculez le module de la vitesse au moment où la chaîne devient complètement verticale. (1 point)
   Indication : Pensez, avant d'intégrer, à écrire l'accélération sous forme : $a_y = \frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv_y}{dy}v_y$

Corrigé :

1) Masse de la chaîne qui pend :
   $m(t) = y(t) \times \lambda$, où $\lambda = M/L$ est la masse linéique. Donc $m(t) = y(t)\frac{M}{L}$
2) Référentiel : du labo, supposé inertiel.
   <u>Première résolution</u> : Système : la chaîne.
   On projette la 2ème loi de Newton sur l'axe vertical (Oy), orienté positivement vers le bas (vous pouvez l'orienter positivement vers le haut, ça ne change rien au final) :
   $\sum F_y = -R + (M - m(t))g + m(t)g = Ma_y(t)$
   avec :
   - $(M - m(t))\vec{g}$: poids de la portion de la chaîne horizontale
   - $\vec{R}$: réaction de la table sur la portion de la chaîne horizontale (dépend aussi du temps)

   Comme la portion de chaîne horizontale n'a qu'une accélération horizontale, cela signifie que, à chaque instant t, on a :
   $(M - m(t))g - R = 0$
   Donc :
   $\sum F_y = m(t)g = Ma_y(t)$
   $y(t)\frac{M}{L}g = Ma_y(t)$
   $a_y(t) = \frac{gy(t)}{L}$
   Remarque : On a ici considéré un système qui change de forme (ce n'est pas un solide). Cependant, toutes les portions de la chaîne ont la vitesse $v = \dot{y}$ et ont l'accélération $\ddot{y}$, c'est pourquoi on peut quand même appliquer la seconde loi de Newton avec cette accélération. On peut aussi le comprendre si, par la pensée, on "redresse" la portion de chaîne qui tombe (verticalement) pour la rendre horizontale (et obtenir ainsi un solide, mais sans changer les forces appliquées), on réalise que l'accélération de la chaine est bien $\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t)$ tout au long de la chaîne, c'est pourquoi le raisonnement ci-dessus conduit au bon résultat. Il y a aussi d'autres manières de résoudre l'exercice, voir ci-dessous.

   <u>Autre résolution</u> : vous pouvez considérer deux sous-systèmes : la portion de chaîne posée (de masse $(M - m(t))$ et la portion de chaîne qui pend (de masse $m(t)$).
   (Ox) est un axe horizontal orienté positivement dans la direction du mouvement de la chaîne.
   — 2ème loi de Newton à la portion de la chaîne posée ($\vec{T_1}$ est la tension exercée par la chaîne qui pend sur la chaîne posée) :
   $(M - m(t))\vec{g} + \vec{R} + \vec{T_1} = (M - m(t))\vec{a}$

On projette sur (Ox) :
$T_1 = (M - m(t))a_x$

— 2ème loi de Newton à la portion de chaîne qui pend ($\vec{T_2}$ est la tension exercée par la chaîne posée sur la chaîne qui pend) :
$m(t)\vec{g} + \vec{T_2} = m(t)\vec{a}$
On projette sur (Oy), orienté positivement vers le bas :
$m(t)g - T_2 = m(t)a_y$

Or une chaîne est inextensible, donc la tension est conservée : $T_1 = T_2 = T$.
On a aussi $a_x = a_y$ car la chaîne est inextensible, et par le choix des orientations des axes.
Donc en éliminant T entre les deux projections précédentes :
$m(t)g - (M - m(t))a_y = m(t)a_y$
$m(t)g = Ma_y$
$a_y(t) = m(t)\frac{g}{M} = y(t)\frac{M}{L}\frac{g}{M}$
$a_y(t) = \frac{g}{L}y(t)$

Remarque : Cette résolution n'est pas très rigoureuse, car elle utilise la seconde loi de Newton pour deux sous-systèmes qui changent de masse (la portion horizontale a une masse $M - m(t)$ dépendante du temps, et la portion verticale une masse $m(t)$). Il se trouve que par bonheur la masse perdue par le sous-système 1 (la portion de chaîne horizontale) est gagnée par le sous-système 2 (la portion de chaîne verticale). La bonne manière de traiter ce genre de problème comportant des (sous-) systèmes de masse variable est en fait via le théorème de la quantité de mouvement, voir résolution ci-dessous.

Résolution par le théorème de la quantité de mouvement :
— Système : portion verticale de la chaîne :
Projetons $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ sur l'axe (Oy) orienté positivement vers le bas ($\vec{T_2}$ est la tension exercée par la chaîne posée sur la chaîne qui pend) :

$$\begin{aligned} m(t)g - T_2(t) &= \frac{d}{dt}(m(t)\dot{y}(t)) \\ &= m(t)\ddot{y}(t) + \dot{m}(t)\dot{y}(t) \\ &= m(t)\ddot{y}(t) + \frac{M}{L}\dot{y}(t)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

— Système : portion horizontale de la chaîne :
Projetons $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ sur l'axe (Ox) orienté positivement dans le sens de

glissement de la chaîne ($\vec{T_1}$ est la tension exercée par la chaîne qui pend sur la chaîne posée) :

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{d}{dt}\left((M-m(t))\dot{x}(t)\right) \\ &= (M-m(t))\ddot{x}(t) + \frac{d}{dt}(M-m(t))\dot{x}(t) \\ &= (M-m(t))\ddot{x}(t) - \dot{m}(t)\dot{x}(t) \\ &= (M-m(t))\ddot{x}(t) - \frac{M}{L}\dot{y}(t)\dot{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Or :

— $T_1(t) = T_2(t)$

— Chaîne inextensible, et par choix des orientations des axes : $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$ et $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t)$.

On additionne les Eq. 1 et 2 :

$$\begin{aligned} m(t)g &= M\ddot{y}(t) \\ y(t)\frac{M}{L}g &= M\ddot{y}(t) \\ \Rightarrow a_y(t) = \ddot{y}(t) &= \frac{g}{L}y(t) \end{aligned}$$

Résolution par la conservation de l'énergie mécanique :

— La vitesse est égale en tout point de la chaîne (et vaut $v(t) = \dot{y}(t)$) donc l'énergie cinétique vaut :
$E_c = \frac{1}{2}M\dot{y}(t)^2$

— Seule l'énergie potentielle de la partie de la chaîne qui pend varie, elle vaut (à une constante près) :
$E_p = -m(t)g\frac{y(t)}{2} = -(\frac{M}{L}y(t))\ g\frac{y(t)}{2} = -\frac{Mgy(t)^2}{2L}$

— L'énergie mécanique ($E_m = E_c + E_p$) est conservée :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ M\dot{y}(t)\ddot{y}(t) - \frac{Mg}{L}y(t)\dot{y}(t) &= 0 \\ a_y(t) = \ddot{y}(t) &= \frac{g}{L}y(t) \end{aligned}$$

(si on exclut la solution triviale $\dot{y}(t) = 0$ donc $y(t)$ =cte qui correspond à la chaîne au repos).

3) Notez que l'accélération dans le plan horizontal a est la même que l'accélération dans le plan vertical a_y car la chaîne est inextensible. Quand $y = 0$, $a = 0$ (la chaîne n'a pas commencé à tomber). Quand $y = L$, $a = g$ (chute libre).

4) $a_y = \frac{dv_y}{dy} v_y = \frac{gy}{L}$
On sépare les variables : $v_y dv_y = \frac{gy}{L} dy$
En intégrant entre l'état initial ($y = y_0$, $v = 0$) et l'état final ($y = L$, $v = v_{yf}$)
$\int_0^{v_{yf}} v_y dv_y = \int_{y_0}^{L} \frac{gy}{L} dy$
$v_{yf}^2 = \frac{g}{L}(L^2 - y_0^2)$
$v_{yf} = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - y_0^2)}$

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Partie Exercices

Année 2020-2021 - Examen de janvier 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles (6 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
11. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
12. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
13. L'examen dure **2h00**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Tous	Tous	Tous	Tous sauf Math-B	Chim, Sci	M-Phys, Phys
/5	/6	/4	/2	/3	/3

1. Toutes sections — 5 points :
Une bille supposée ponctuelle de masse m glisse sans frottements sur une glissière présentant une boucle circulaire de rayon R. On veut que la bille, lâchée en A sans vitesse initiale, arrive en C (au point culminant de la boucle) sans décoller de la glissière, et donc "boucle la boucle". On appelle $v_{\mathrm{C,min}}$ la vitesse minimale que doit avoir la bille en C pour décrire ce cercle sans décoller. On néglige les frottements.

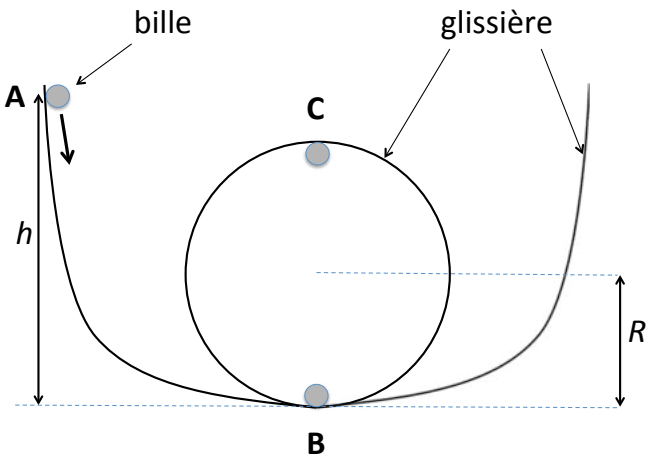
a) Par analyse dimensionnelle, exprimez $v_{\mathrm{C,min}}$ en fonction de (certaines de) ces variables : $\{m, R, g\}$.

b) Représentez (dans le référentiel du laboratoire) les forces agissant sur la bille en B et en C si $v > v_{\mathrm{C,min}}$.

c) Quelle est la condition (impliquant une force) pour que la bille décolle en C ? En déduire l'expression de $v_{\mathrm{C,min}}$.

d) De quelle hauteur minimale h_{min} faut-il lâcher la bille pour qu'elle ne décolle pas en C ? (si vous avez résolu le point précédent, donnez la réponse en fonction des données de l'énoncé $\{m, R, g\}$; sinon, donnez la réponse en fonction des données $\{m, R, g, v_{\mathrm{C,min}}\}$).

Remarque : La figure ci-dessous représente la même bille, dessinée à 3 positions successives A, B puis C.



Solution :

a) $v = C \times g^{\alpha} R^{\beta} m^{\gamma}$
$m^1 s^{-1} = (m)^{\alpha}(s)^{-2\alpha}(m)^{\beta}(kg)^{\gamma}$
d'où :
$\gamma = 0$
$\alpha = \beta = 1/2$
$v = C \times \sqrt{gR}$

b) En B : le poids $\vec{P}$ dirigé vers le bas (point d'application : centre de masse de la bille), la réaction de la glissière $\vec{N}$, dirigée vers le haut (point d'application : interface glissière-bille).
En C si $v > v_{\mathrm{C,min}}$ (donc la bille ne décolle pas) : le poids $\vec{P}$ dirigé vers le bas, la réaction de la glissière $\vec{N}$, dirigée vers le bas, même points d'application que précédemment.

c) La bille décolle si la réaction s'annule : $\vec{N} = \vec{0}$.
Seconde loi de Newton à la bille en C, projetée sur un axe vertical orienté vers le bas :
$mg = mv_{C,min}^2/R$ d'où $v_{C,min} = \sqrt{gR}$

d) Conservation de l'énergie mécanique entre A et C :
$E_c + E_p$ =cte
$0 + mgh_{min} = 1/2mv_{C,min}^2 + 2mgR$
$h_{min} = 2R + (v_{C,min}^2/(2g))$
$h_{min} = 5/2R$

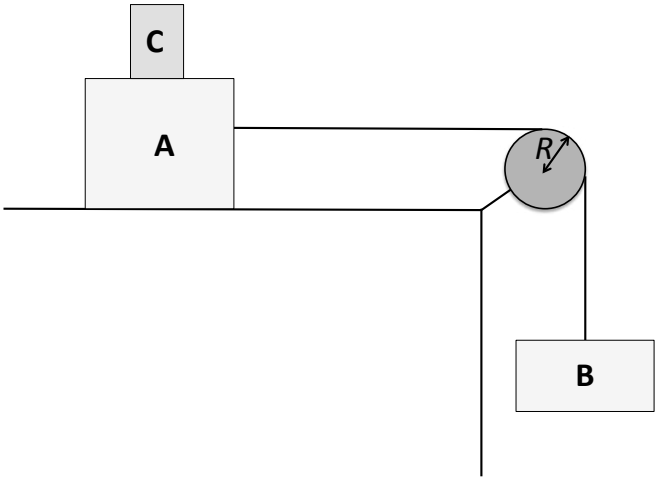
2. Toutes sections — 6 points :
Les blocs A et B, de masses m_A et m_B, sont reliés par un fil inextensible passant par une poulie de masse M et de rayon R. Le bloc C (masse m_C) est posé sur le bloc A. Entre le bloc A et la table, les coefficients de frottement statiques et dynamiques (=cinétiques) sont égaux ($\mu_s = \mu_c = \mu$).

A) On suppose que la poulie a un moment d'inertie négligeable par rapport à son axe de rotation ($I_O = 0$).

   a) Quelle est la masse minimale du bloc C qui empêche le bloc A de bouger ?

   b) On retire le bloc C. Quelle est l'accélération du bloc A ?

B) La poulie possède un moment d'inertie par rapport à son axe de rotation qui vaut $I = MR^2/2$. On retire le bloc C. Quelle est l'accélération du bloc A ? Discutez la pertinence du résultat obtenu.



Solution :

A) a) Système : bloc B. Seconde loi de Newton projetée sur (Oy), axe vertical orienté vers le bas :
$m_B g - T_B = m_B a_B$
Système : blocs A+C. Seconde loi de Newton projetée sur (Ox), axe horizontal orienté vers la droite :
$T_A - F_f = (m_A + m_C)a_A$.
$T_A = T_B$ car théorème du moment cinétique appliqué à la poulie de moment d'inertie $I = 0$: la somme des moments des forces est nulle : $RT_B - RT_A = 0$
Fil inextensible : $a_B = a_A$ avec le choix de l'orientation des axes. On déduit des deux relations précédentes :
$a = \frac{m_B g - F_{f,d}}{m_A + m_B + m_C}$.
$F_f = \mu N = \mu(m_A + m_C)g$.
Le système ne bouge plus si a=0 donc si $m_B g - \mu(m_A + m_C)g = 0$.
D'où $m_{C,min} = m_B/\mu - m_A$.

b) On soulève le bloc C.
Système : bloc B. Seconde loi de Newton projetée sur (Oy), axe vertical orienté vers le bas :
$m_B g - T_B = m_B a_B$
Système : bloc A. Seconde loi de Newton projetée sur (Ox), axe horizontal orienté vers la droite :
$T_A - F_f = (m_A)a_A$.
$T_A = T_B$ car $I = 0$.
Fil inextensible : $a_B = a_A$ avec le choix de l'orientation des axes. On déduit des deux relations précédentes :
$a = g\frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B}$.

B) Système : bloc A : $T_A - F_f = T_A - \mu m_A g = m_A a_A$ donc $T_A = m_A a_A + \mu m_A g$.
Système : bloc B : $m_B g - T_B = m_B a_B$ donc $T_B = m_B(g - a_B)$.
Fil inextensible : $a_B = a_A$ avec le choix de l'orientation des axes..
Système : poulie : $-T_A R + T_B R = I\gamma = Ia/R$ (avec γ l'accélération angulaire, positive dans le sens horlogique, donc $a = \gamma R$). Donc $T_B - T_A = Ia/r^2$
En remplaçant par les expressions de T_A et T_B on en déduit : $a = g\frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B + I/R^2}$
d'où $a = g\frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B + M/2}$
Discussion :
Si pas de frottements et $m_B \gg m_A$ et M, $a \sim g$ (chute libre).
Si pas de frottements et $M \gg m_A$ et m_B, $a \sim 0$ (l'inertie de la poulie empêche tout mouvement).
Si frottements suffisamment grands, on immobilise le système.

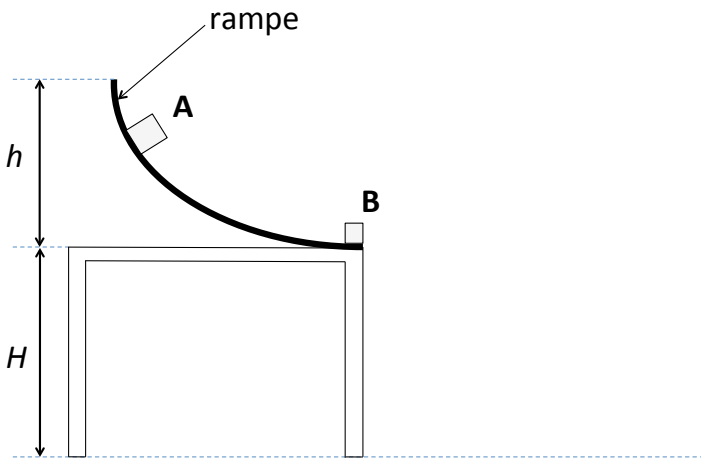
3. Toutes sections — 4 points :
Un cube A de masse m_A glisse sans frottement et avec vitesse initiale nulle depuis le haut d'une rampe de hauteur h et entre en collision avec un second cube B de masse $m_B = m_A/2$ qui est en bas de la rampe. La rampe est posée sur une table à la hauteur H du sol.

a) Calculer v_A, la vitesse du cube A en bas de la rampe (juste avant le choc).

b) Si le choc est totalement inélastique, calculez la vitesse juste après le choc v'_{AB}.

c) Toujours dans l'hypothèse du choc totalement inélastique, à quelle distance horizontale du bord de la table les cubes atterrissent-ils ?

Remarques :
Si vous n'avez pas trouvé la réponse de a), exprimez la réponse de b) en fonction de v_A, sinon, exprimez-la en fonction de certaines données de l'énoncé $\{m_A, g, h, H\}$.
Si vous n'avez pas trouvé la réponse de b), exprimez la réponse de c) en fonction de v'_{AB}.



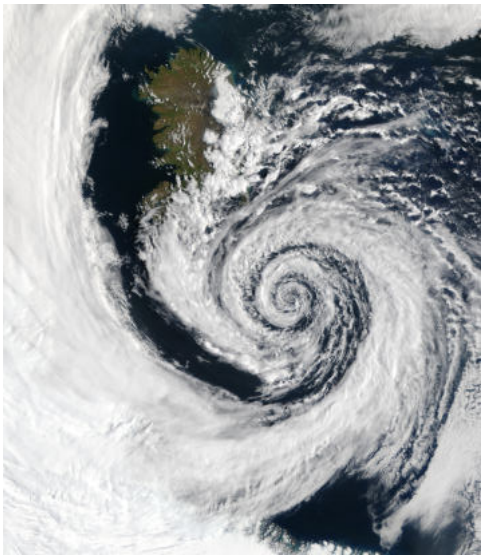
Solution :

a) Conservation de l'énergie mécanique : $Mgh = 1/2Mv_A^2$ donc $v_A = \sqrt{2gh}$.

b) Collision inélastique : conservation de la quantité de mouvement : $m_A v_A = (m_A + m_B)v'_{AB}$
Donc $v'_{AB} = (2/3)v_A$ (pour ceux qui n'ont pas trouvé le a))
et $v'_{AB} = (2/3)\sqrt{2gh}$ (pour ceux qui ont trouvé le a))
(Les deux réponses donnent le maximum de points pour cette sous-question).

c) $y = -(1/2)gt^2 + H$
$y_{sol} = 0$ à l'instant $t_{sol} = \sqrt{2H/g}$
$x_{AB,sol} = v'_{A,B} \times t_{sol}$
Donc $x_{AB,sol} = v'_{A,B}\sqrt{2H/g}$ (pour ceux qui n'ont pas trouvé le a))
et $x_{AB,sol} = 4/3\sqrt{hH}$ (pour ceux qui ont trouvé le a))
(Les deux réponses donnent le maximum de points pour cette sous-question).

4. Toutes sections SAUF Math-Bio — 2 points :



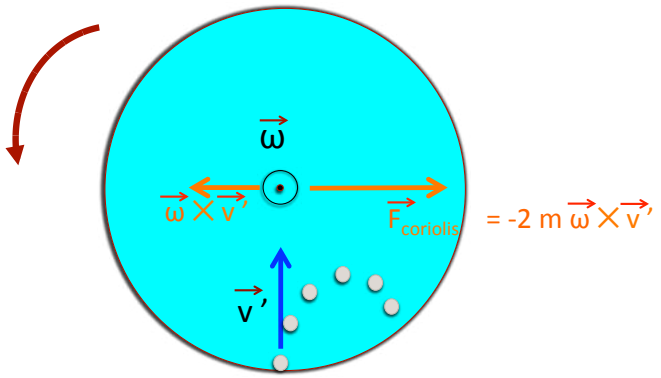
a) La photo ci-dessus représente un cyclone. Quelle force conditionne le sens de rotation du cyclone ? Donnez son expression en fonction de la vitesse angulaire de la Terre ($\vec{\omega}$) et de la vitesse d'un nuage par rapport à la Terre ($\vec{v'}$).

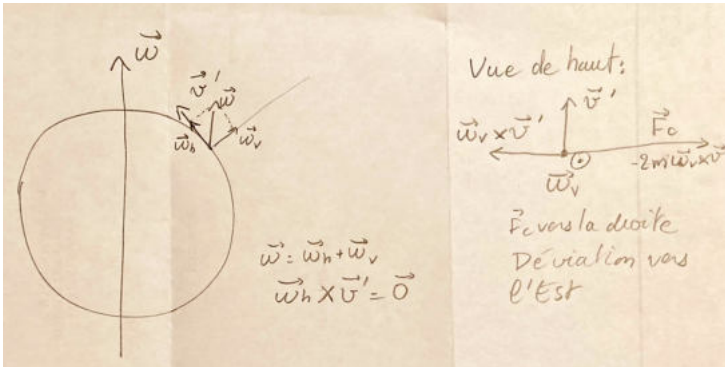
b) Justifiez : faire un schéma clair et expliquer le sens de la déviation des nuages à partir de la formulation obtenue précédemment.

Solution :

a) C'est la pseudo-force de Coriolis qui dévie les nuages. $\vec{F} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$ où $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire de la Terre et $\vec{v'}$ la vitesse d'un nuage de masse m par rapport à la Terre.

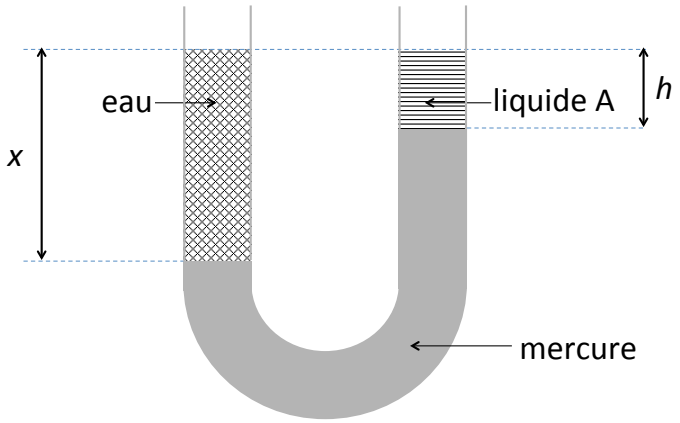
b) Une figure telle que l'une de celles-ci :





5. Uniquement Chimistes et Sciences (Polyvalents) – 3 points :

Un tube en U de section S est rempli de mercure. Dans la branche de droite, on ajoute un liquide A et dans celle de gauche, de l'eau de manière à ce que le niveau de la surface libre de l'eau coïncide avec celui du liquide A (voir figure ci-dessous). Les 3 liquides sont non miscibles (c'est-à-dire qu'ils ne se mélangent pas entre eux). Le liquide A occupe une hauteur h.



Quelle est la hauteur x occupée par l'eau ? Déterminez l'expression littérale puis faites l'application numérique.

Application numérique :
$h = 20\text{cm}$, $S = 2\text{cm}^2$.
Masse volumique du liquide A : $\rho_{\text{A}} = 8.5\ \text{g/cm}^3$.
Masse volumique du mercure : $\rho_{\text{Hg}} = 13.6\ \text{g/cm}^3$.
Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1\ \text{g/cm}^3$.

Solution :

Soit A un point à l'interface entre l'eau et le mercure, et B un point à l'interface huile-mercure.
$P_A - P_{atm} = \rho_{eau} g x$ (1)
$P_B - P_{atm} = \rho_{\text{liquideA}} g h$ (2)
$P_A - P_B = \rho_{Hg} g (x - h)$ (3)
En remplaçant P_A de (1) et P_B de (2) dans (3), on trouve : $x = h(\rho_{Hg} - \rho_{\text{liquideA}})/(\rho_{Hg} - \rho_{eau})$
A.N. x = 8 cm

6. Uniquement Math-Physique et Physique — 3 points :

Un tube en U de section S est rempli uniquement d'eau (masse volumique ρ) sur une longueur ℓ. On fait subir à l'eau un léger déplacement puis on la laisse bouger librement. On néglige la viscosité et l'eau est supposée incompressible.

A) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrez que le liquide effectue un mouvement harmonique simple. Indications :

(a) Calculez la masse d'eau

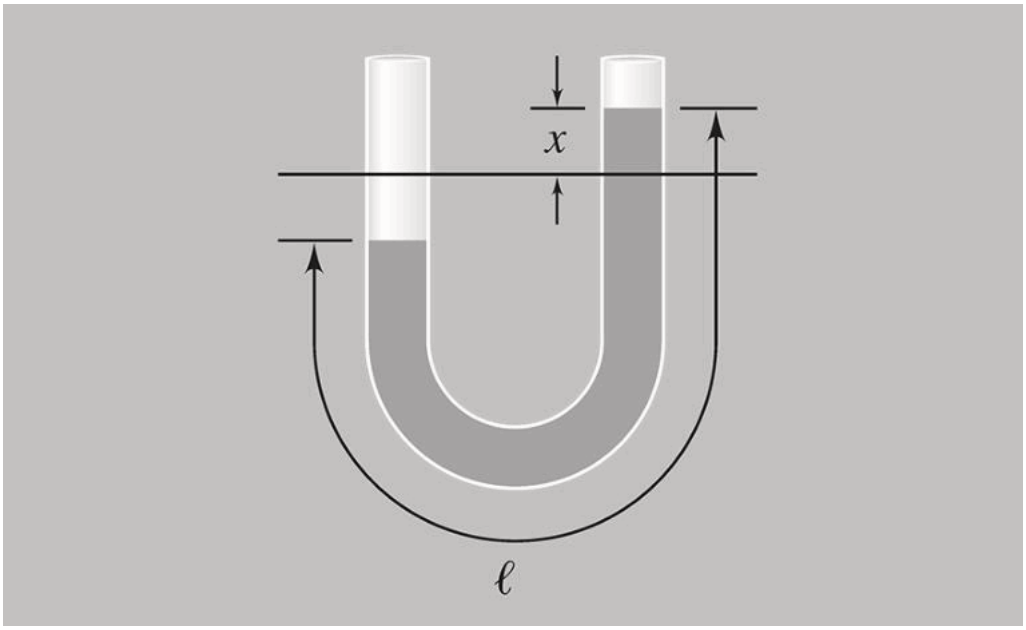
(b) Calculez l'énergie cinétique de la masse d'eau

(c) Calculez l'énergie potentielle de l'eau dans la configuration représentée (en considérant le centre de masse de l'eau contenue dans la portion verticale droite et la portion verticale gauche du tube)

(d) En déduire l'énergie mécanique.

La dérivée en fonction du temps de l'énergie mécanique doit être nulle.
Donnez la période des oscillations.

B) Question facultative (bonus) : En utilisant la seconde loi de Newton, retrouvez le résultat du A) et donnez la période des oscillations. Indications : la force de rappel est le poids de la colonne d'eau de hauteur $2x$; appliquez la deuxième loi de Newton à toute la masse d'eau.



Solution :

a) L'eau subit un déplacement x donc la force de rappel est causée par le poids de la colonne d'eau de hauteur $2x$: $-(\rho 2xS)g = M_{tot,eau}a = \rho S\ell a = +\rho S\ell\ddot{x}$
Donc $\ddot{x} + (2g/\ell)x = 0$
C'est l'équation d'un mouvement oscilatoire harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{2g/\ell}$ et de période $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/2g}$.

b) Energie cinétique : $E_c = 1/2\rho S\ell\dot{x}^2$
Energie potentielle : L'énergie potentielle de l'eau dans partie courbée du U ne change pas aux petites oscillations : c'est donc une constante.
Le centre de masse de l'eau dans le tube vertical de gauche (qui au repos a une hauteur h) est à une hauteur : $(h - x)/2$.
La masse de l'eau dans le tube vertical de gauche vaut : $\rho S(h - x)$.
Donc l'énergie potentielle de l'eau dans le tube vertical de gauche vaut : $1/2\rho gS(h - x)^2$.
De même, l'énergie potentielle de l'eau dans le tube vertical de droite vaut : $1/2\rho gS(h+x)^2$.
L'énergie mécanique vaut donc :
$E_m = 1/2\rho gS((h - x)^2 + (h + x)^2) + 1/2\rho S\ell\dot{x}^2$
$\frac{dE_m}{dt} = 1/2\rho gS\dot{x}(-2(h - x) + 2(h + x)) + 1/2\rho S\ell 2\dot{x}\ddot{x} = 0$
Si $\dot{x} \neq 0$, $\ddot{x} + \frac{2g}{\ell}x = 0$.
Mêmes conclusions que précédemment.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2020-2021 - Examen de juin 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **4 feuilles (3 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
7. Vous n'avez droit ni à un aide-mémoire ni à une calculatrice.
8. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
11. Cette partie Théorie de l'examen dure **1h**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3
/4	/3	/3

1. Toutes sections — 4 points :

On veut démontrer le théorème de la quantité de mouvement.

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel. On considère un système $\mathscr{S}$ de N points matériels de masses m_i placés aux points A_i, $1 \leq i \leq N$.

a) Rappelez la définition de la quantité de mouvement (ou impulsion) $\vec{p_i}$ d'un des points matériels A_i.

b) Enoncez le théorème de la quantité de mouvement.

c) Démontrez le théorème de la quantité de mouvement. On définira chaque terme et on justifiera soigneusement chaque étape de la démonstration.

d) Pourquoi peut-on raisonnablement considérer que la quantité de mouvement est conservée lors d'une collision ?

Solution 1:
Slides 154-156

2. Toutes sections — 3 points :

Soit un objet composé d'un grand nombre N de particules. La position de la i-ème particule par rapport à l'origine O d'un référentiel inertiel est notée $\vec{r}_i$; elle est notée $\vec{r'}_i$ par rapport au centre de masse.

a) Donnez l'expression du moment cinétique $\vec{J}_{CM}$ par rapport au centre de masse.

b) Donnez l'expression du moment cinétique $\vec{J}_O$ par rapport à l'origine O, en fonction de $\vec{J}_{CM}$.

c) Démontrez cette relation.

Solution 2:
Slides 171-172

3. Attention, barrez les questions qui ne vous concernent pas :

Toutes sections sauf Math-Bio — 3 points

a) Enoncez le principe d'Archimède.

b) Démontrez-le, en prenant l'exemple d'un corps plongé intégralement dans un fluide.

c) Lorsque la coque d'un bateau flottant sur l'eau est inclinée, (i) soit elle reviendra à sa position d'équilibre initial ; il s'agit alors d'une position d'équilibre stable, (ii) soit elle s'en écartera de plus en plus ; il s'agit alors d'une position d'équilibre instable. Faites deux schémas illustrant ces deux situations (i) et (ii), en indiquant bien les forces (nom, point d'application, direction) agissant sur le bateau. Expliquez pourquoi la situation (ii) est instable.

Math-Bio : — 3 points

a) Donnez l'expression du travail dW d'une force de rappel d'un ressort de constante de raideur k exercée le long d'un déplacement infinitésimal $d\vec{\ell}$.

b) Déduisez-en l'expression du travail exercé par la force de rappel entre deux points A et B.

c) Déduisez-en l'expression de la différence d'énergie potentielle entre A et B. Comment appelle-t-on les forces qui satisfont à une telle relation entre travail et différence d'énergie potentielle ?

Solution 3:
Toutes sections sauf Math-Bio : Slides 270, 271, 273
Math-Bio : Slides 109, 119, 120.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Partie Exercices

Année 2020-2021 - Examen de juin 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles (6 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
11. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
12. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
13. L'examen dure **2h00**.

Bon travail !

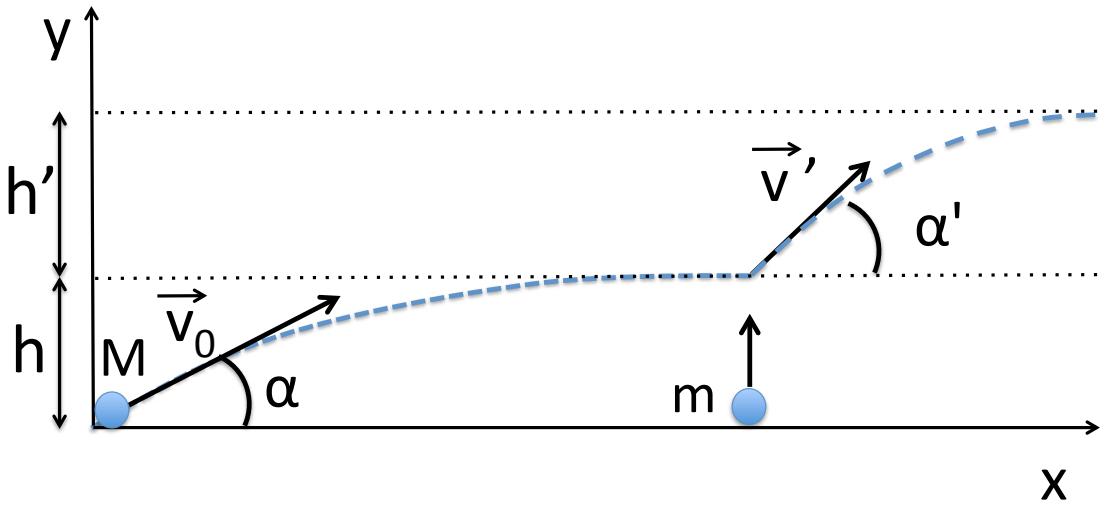
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Tous	Tous	Tous	Tous	Chim, Sci	M-Phys, Phys
/4	/3	/5	/5	/3	/3

1. Toutes sections — 4 points :
Un projectile de masse M est lancé depuis le sol avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant avec un angle α non nul avec l'horizontale. Au sommet de sa trajectoire, il entre en collision avec un autre projectile de masse m lancé verticalement depuis le sol ; ce dernier possède la vitesse (verticale ascendante) $\vec{u}$ à l'instant juste avant la collision. Les deux projectiles restent collés l'un à l'autre après la collision.

a) Calculez la hauteur h à laquelle se produit la collision

b) Calculez les composantes v'_x et v'_y de la vitesse $\vec{v}'$ après le choc. Discutez le résultat obtenu si m tend vers 0 et l'infini, et si M tend vers 0 et l'infini.

c) Calculez h', la hauteur additionnelle atteinte suite au choc. (Si vous n'avez pas résolu le b), vous pouvez exprimer le résultat en fontion de v' ou de ses composantes).



Solution 1:

a) Hauteur à laquelle se produit la collision : c'est la hauteur du sommet de la trajectoire. Pour la trouver, on projette la 2ème loi de Newton sur un axe vertical (Oy), puis on intègre :

$$\begin{aligned} \Sigma\vec{F} &= M\vec{a} \\ -Mg &= M\ddot{y} \\ a_y &= -g \\ v_y &= -gt + v_0 \sin\alpha \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + 0 \end{aligned}$$

Au sommet de la trajectoire, la vitesse est horizontale donc $v_y = 0$, ce qui conduit à $t = v_0 \sin\alpha/g$. Donc :

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2}g(v_0 \sin\alpha/g)^2 + v_0 \sin\alpha(v_0 \sin\alpha/g) \\ &= \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \end{aligned}$$

b) Le choc est inélastique, on applique la conservation de la quantité de mouvement entre l'instant juste avant le choc, et l'instant juste après le choc.

$$\begin{aligned} Mv_x &= (m+M)v'_x \\ mu_y &= (m+M)v'_y \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{M}{m+M}v_x \\ v'_y &= \frac{m}{m+M}u_y \end{aligned}$$

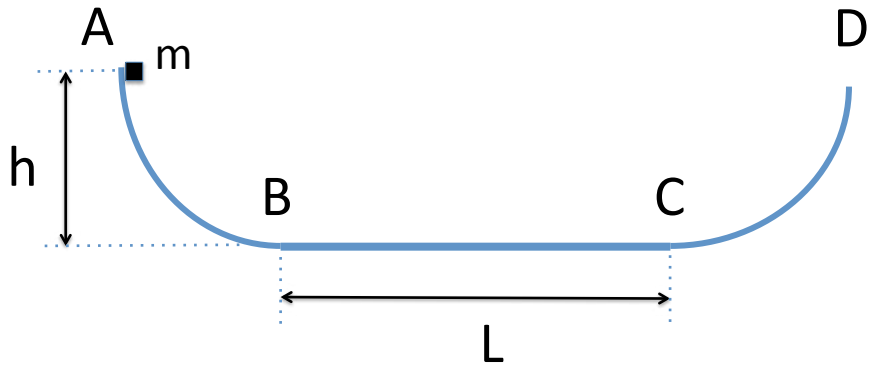
Si m tend vers 0, la collision n'a pas lieu, la vitesse horizontale est inchangée, et aucune vitesse verticale n'est communiquée lors de l'impact.
Si m tend vers l'infini, la vitesse devient uniquement verticale après impact.
Si M tend vers 0, la masse m continue sa trajectoire purement verticale sans perturbation.
Si M tend verds l'infini, la masse M continue sa trajectoire sans être perturbée.

c) On peut utiliser le résultat du a), mais avec une vitesse initiale $\vec{v}'$ et un angle α' :

$$\begin{aligned} h' &= \frac{(v' \sin\alpha')^2}{2g} \\ &= \frac{v'^2_y}{2g} \\ &= \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}u_y\right)^2 \end{aligned}$$

2. Toutes sections — 3 points :
Une particule de masse m glisse le long d'une piste dont la forme est illustrée ci-dessous. Les portions courbes de la piste sont sans friction tandis que la partie horizontale, longue de $L = 2{,}0$ m, présente un coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0{,}2$. On libère la particule au point A (situé à une hauteur $h = 1{,}0$ m au-dessus de la portion horizontale de la piste).

Localisez, sur la piste, l'endroit où la particule s'immobilisera, et justifiez votre raisonnement.



Solution 2:

Entre A et B, il n'y a pas de frottement, donc l'énergie mécanique est conservée.

$$1/2mv_B^2 = mgh$$

Calculons la distance D que peut parcourir la particule sur la portion horizontale avant de s'arrêter. Pour cela on applique le théorème de l'énergie cinétique entre B et C :
$\Delta E_{cin} = W_{\text{total}} = W_C + W_{NC}$.

Le travail du poids est nul (car il est perpendiculaire au déplacement entre B et C). Donc seul le travail de la force de frottement est non nul entre B et C.

Cette force vaut $F_f = \mu_c mg$. (Pour trouver cela, on applique, sur la portion BC, la 2ème loi de Newton, que l'on projette sur un axe vertical (Oy) : $R - mg = ma_y = 0$, où $\vec{R}$ est la réaction du sol. Le second membre est nul car la composante verticale de l'accélération (a_y) est nulle, puiqu'on a un mouvement rectiligne. La force de frottement cinétique est $F_f = \mu_c R$ donc $F_f = \mu_c mg$).

Donc

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{cin}} &= W_{F_f} \\ 0 - 1/2\ mv_B^2 &= \int_0^D \vec{F}_f \,.\, \vec{dl} = \vec{F}_f \,.\, \int_0^D \vec{dl} = -\mu_c mgD \\ mgh &= \mu_c mgD \\ D &= \frac{h}{\mu_c} \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $\vec{F}_f$ de $\vec{dl}$ sont anti-colinéaires).

A.N. : On trouve $D = 5$ m

Comme $D > L = 2$m, la particule arrive pour la première fois en C avec une vitesse $v_{C,1}$ non nulle. Elle monte donc jusqu'à une certaine hauteur h' (telle que $1/2mv_{C,1}^2 = mgh'$, mais peu importe) sur la partie courbe CD. Comme toutes les forces sont conservatives entre C et D (pas de frottement sur la partie courbe), l'énergie potentielle qu'elle emmagasine lors de la montée sera intégralement restituée lors de la descente. Donc lorsqu'elle repasse en C à la descente, elle a une vitesse $v_{C,2}$ identique à celle de l'aller ($v_{C,2} = v_{C,1}$). Le trajet sur la partie courbe est donc une "opération blanche" du point de vue de la vitesse de la particule.

La particule parcourt encore 2m entre C et B, en ralentissant puisqu'il y a des frottements. Elle arrive en B avec une vitesse non nulle (puisqu'elle est capable de parcourir 5m sur la surfave rugueuse). Elle monte sur la portion BA jusqu'à une certaine hauteur (peu importe laquelle), puis repasse par B avec exactement la même vitesse qu'à la montée, puisqu'il n'y a pas de frottements entre B et A, donc tout l'énergie cinétique qu'elle possède à l'aller en A est restituée au retour en A.

La particule peut encore parcourir 1m sur la portion avec frottements avant de s'arrêter. par conséquent, elle s'immobilise au milieu du segment [BC].

3. Toutes sections — 5 points :
Une tige de longueur L et de masse M est maintenue au sol par une rotule qui est fixée en O. Elle est initialement en équilibre verticalement (schéma, étape a.) puis tombe sur le sol en pivotant autour de O (schéma, étape b.).

Le moment d'inertie d'une tige par rapport à son extrémité vaut $I = ML^2/3$.

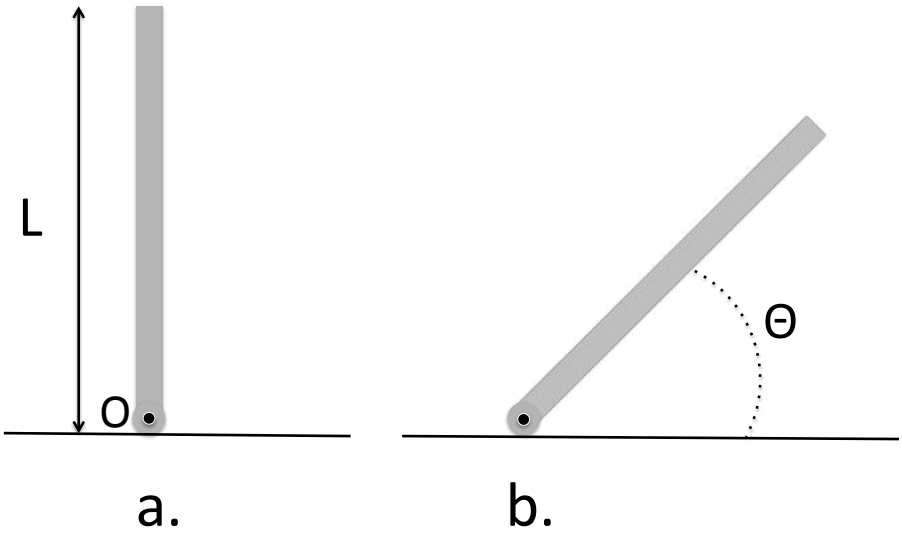
a) Représentez les forces agissant sur la tige quand l'angle entre la tige et le sol vaut θ, $0 < \theta < \pi/2$.

b) Calculez le travail des forces agissant sur la tige pendant la chute. Justifiez.

c) Calculez les moments exercés par ces forces par rapport à O lorsque l'angle entre la tige et le sol vaut θ. Représentez ce(s) vecteur(s) sur le schéma.

d) Quelle est l'accélération angulaire de la tige lorsqu'elle fait un angle θ avec le sol ? Vous pourrez utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à O.

e) Quel est le module de l'accélération tangentielle de l'extrémité libre de la tige juste avant qu'elle ne touche le sol ? Comparez avec l'accélération d'un objet en chute libre.



Solution 3:

a) Forces :
- le poids $\vec{P}$, direction : verticalement ; sens : vers le sol ; point d'application : centre de masse de la barre.
- la réaction du pivot $\vec{R}$: direction : en oblique ; sens : vers le haut ; point d'application : O.

b) Travail de la réaction du pivot : le point d'application de la force ne se déplace pas, donc $W(\vec{R}) = 0$ J.
Travail du poids : $W(\vec{P}) = Mg(y_{\text{final}} - y_{\text{initial}}) = MgL/2$.

c) $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{R},O} = \vec{0}$ puisque la réaction $\vec{R}$ passe par O.

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P},O} = \vec{OG} \times M\vec{g} = -(L/2)Mg\cos\theta\ \vec{u}_z$, où on aura défini le trièdre orthornormé $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{u}_x$ soit horizontal et orienté positivement vers la droite, $\vec{u}_y$ soit vertical et orienté positivement vers le haut, et $\vec{u}_z$ sorte de la feuille.

d) Théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathcal{J}}_O}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\text{ext}},O} \\ I\ddot{\theta} &= \frac{L}{2}Mg\cos\theta \\ \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} &= \frac{L}{2}Mg\cos\theta \\ \ddot{\theta} &= \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta \end{aligned}$$

en projetant sur (Oz), axe perpendiculaire à la feuille.

e) Lorsque la barre est horizontale, $\theta = 0$ donc $\ddot{\theta} = 3g/2L$. L'accélération tangentielle au bout de la barre vaut $a_t = L\ddot{\theta} = 3g/2 > g$.
Donc l'extrémité libre de la barre tombe plus vite qu'un objet en chute libre, ce qui est un peu contre-intuitif.

4. Toutes sections — 5 points :

Quand on veut construire le miroir d'un télescope, polir une galette de verre massif pour lui donner une forme parabolique parfaite (ce qui permet de focaliser les rayons lumineux au foyer du télescope) est très coûteux. La technique des miroirs liquides est parfois utilisée : du mercure liquide est contenu dans un large récipient cylindrique qui est mis en rotation autour de son axe (Oy) à vitesse angulaire constante ω. La surface d'un bain de liquide en rotation uniforme est parfaitement parabolique. Cet exercice a pour but de le prouver.

Considérons une masse infinitésimale dm de mercure à la surface du bain de mercure (voir schéma). On considère que la résultante des forces de pression du mercure environnant sur cet élément de mercure est une force $\vec{R}$ perpendiculaire à la surface du bain de mercure. On néglige la tension de surface. A l'équilibre, cette masse se déplace sur un cercle de rayon x à la vitesse angulaire constante ω.

On note $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

a) L'équation de la surface du miroir liquide est (à deux dimensions) $y(x) = f(\omega, g)\ x^2$. Trouvez $f(\omega, g)$ par analyse dimensionnelle.

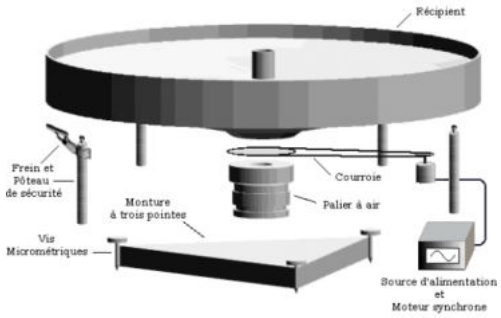
Nous allons maintenant prouver que la surface du miroir liquide prend effectivement une forme parabolique.

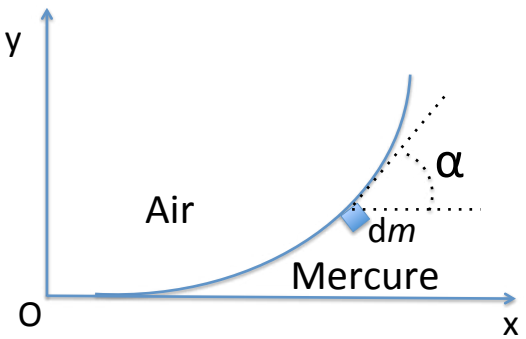
b) Quelles forces subit la masse de liquide dm dans le référentiel fixe du laboratoire ? Représentez-les soigneusement sur un dessin.

c) En utilisant la deuxième loi de Newton, exprimer $\tan\alpha$ en fonction de ω, x et g. On note α l'angle entre la tangente à la surface du miroir et l'horizontale (Ox)(voir schéma).

d) On note dx et dy les déplacements infinitésimaux selon les coordonnées x et y le long de la courbe $y(x)$. Exprimez $\tan\alpha$ en fonction de dy et dx. En déduire l'équation différentielle liant les variables x et y.

e) Intégrez cette équation différentielle pour trouver $y(x)$ en fonction de x.





Solution 4:

a) Si C est une constante sans dimension, on a :

$$\begin{aligned} y &= C\ f(\omega, g)\ x^2 \\ L &= (T^{-1})^a\ (LT^{-2})^b\ L^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= b+2 \\ 0 &= -a-2b \end{aligned}$$

Donc $b=-1$ et $a=2$. Par conséquent : $y(x) = C\ \frac{\omega^2}{g}\ x^2$

b) L'élément de masse dm subit son poids $\vec{P}$ (vertical, orienté vers le bas, point d'application centre de masse de dm) et la résultante des forces de pression $\vec{R}$ (normale à la surface du miroir, orientée vers les y croissants, point d'application : on accepte n'importe quel point de dm qui est de toute façon un élément infinitésimal).

c)

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Sur (Ox) : $-R\sin\alpha = -\mathrm{d}m\ \frac{v^2}{x} = -\mathrm{d}m\ \omega^2\ x$.
car l'élément de masse dm est en mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon x, à la vitesse angulaire constante ω, donc l'accélération est uniquement normale et vaut $v^2/x = \omega^2 x$.
Sur (Oy) : $R\cos\alpha - \mathrm{d}m\ g = 0$
Donc :

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$$

d)

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

Donc les deux équations précédentes donnent :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\omega^2}{g}\ x\ dx \\ y(x) &= \frac{\omega^2}{2g}\ x^2 \end{aligned}$$

On a bien l'équation d'une parabole.

5. Uniquement chimistes et polyvalents — 3 points :



Pour effectuer des mesures précises de masse à l'aide d'une balance à ressort, il faut faire une correction tenant compte de la poussée d'Archimède.

a) Expliquez pourquoi la poussée d'Archimède nécessite de corriger la mesure de la masse déduite de la balance à ressort.

b) Si la balance à ressort indique une valeur M pour la masse d'une barre en cuivre, quelle est la masse réelle de cette barre ?

Application numérique :
M=200,000 g (= 200 grammes).
Masse volumique du cuivre à 20°C : $\rho_c = 8960$ kg m^{-3}.
Masse volumique de l'air à 20°C : $\rho_{\text{air}} = 1{,}2900$ kg m^{-3}.

Solution 5:

a) La poussée d'Archimède F_p est la résultante des forces exercées par le fluide environnant sur un corps solide immergé. Elle est égale au poids du volume que le fluide occuperait à la place du solide si on retirait ce dernier. Son module est donné par $F_p = \rho_f V g$, où ρ_f est la masse volumique du fluide.

L'objet suspendu à la balance à ressort subit une poussée d'Archimède vers le haut, exercée par l'air environnant, qui vient s'additionner (vectoriellement) à son poids, et modifier la mesure indiquée par la balance.

b)

$$\begin{aligned} F_p &= \rho_{\text{air}} V_{\text{barre}} g \\ &= \rho_{\text{air}} (M/\rho_c) g \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta M &= F_p/g \\ &= (\rho_{\text{air}}/\rho_c) M \end{aligned}$$

Masse réelle de la barre : $M_{\text{réelle}} = M + \Delta M = M(1 + \rho_{\text{air}}/\rho_c)$.

A.N. :

$\Delta M = 0.029$ g.

$M_{\text{réelle}} = 200.029$ g.

6. Uniquement Math-Physique et Physique — 3 points :
En imagerie médicale, on utilise le battement produit entre l'onde émise par une source sonore (ultrasons) à une fréquence f et l'onde réfléchie par les globules rouges pour déterminer la vitesse de l'écoulement sanguin (donc des globules rouges) v_{gr}. On suppose que le vaisseau sanguin est dans l'axe de l'émetteur, et que le globule rouge se déplace vers l'émetteur. On suppose que la vitesse du son dans le corps humain, v_{son}, est constante.

a) Donnez l'expression de la fréquence f' des ultrasons réfléchis par le globule rouge.

b) Donnez l'expression de la fréquence f'' des ultrasons réfléchis par le globule rouge et tels que reçus par un détecteur au repos placé à côté de l'émetteur (exprimez cette fréquence en fonction des données de l'énoncé et calculez sa valeur numérique).

c) Expliquez le phénomène de battement qui se produit et comment, en mesurant ce battement, on a accès à la vitesse de l'écoulement sanguin (il n'est pas nécessaire de faire le calcul explicite).

Application numérique :
$v_{\text{gr}} = 20$ cm/s.
$v_{\text{son}} = 1{,}540$ m/s
$f = 5$ MHz

Solution 6:

a) Le globule est l'observateur. On est dans le cas où la source est au repos et l'"observateur" (le globule rouge) est en mouvement et se rapproche de la source. Donc :

$$f' = \frac{v_{\text{son}} + v_{\text{gr}}}{v_{\text{son}}} f \tag{1}$$

b) Le détecteur est l'"observateur". On est dans le cas où la source est en mouvement et se rapproche de l'"observateur". Donc :

$$f'' = \frac{v_{\text{son}}}{v_{\text{son}} - v_{\text{gr}}} f' \tag{2}$$

Donc :

$$f'' = \frac{v_{\text{son}} + v_{\text{gr}}}{v_{\text{son}} - v_{\text{gr}}} f \tag{3}$$

A.N. : $f'' = 6.49$ MHz.

c) Les battements sont un phénomène d'interférence se produisant lors de la superposition de deux ondes de fréquences différentes (ici f et f''). En un point fixe de l'espace, on mesurera alors une onde de fréquence constante $(f + f'')/2$ dont l'amplitude est modulée à la fréquence $(f - f'')/2$. Des "battements" (définis comme les instants où l'amplitude de l'onde résultante est nulle [1]) se produisent deux fois par période, donc la fréquence des battements est double : $f_b = f - f''$.

Donc si on mesure f_b, on connait $f - f''$. Avec l'Eq. 3, ceci fournit un système de 2 équations à 2 inconnues (v_{gr}, f''). On peut donc en déduire v_{gr}.

1. On peut, de manière identique, les définir comme les instants où l'amplitude de l'onde résultante est maximale.

Interro de Physique Générale – PHYS-F110
Théorie

Année 2021-2022 - Novembre 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **3 feuilles (2 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
5. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
6. Vous n'avez droit ni à un aide-mémoire ni à une calculatrice.
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
9. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.

Bon travail !

Q1	Q2
/3	/3

1. Théorie — 3 points :

a) Définissez une force conservative.

b) Donnez une expression entre une force conservative et l'énergie potentielle associé.

c) Quelle est l'énergie potentielle associée à la force de rappel d'un ressort idéal ? Démontrez-le.

d) Soit l'énergie potentielle d'un système donnée par $U(x) = ax^2 - bx$, où a et b sont des contantes. Déterminez F_x, la composante selon x de la force associée à cette fonction énergie potentielle.

Solution 1:

a) Slide 123

b) Slide 123 et/ou slide 132

c) Slide 109 et 119

d) Slide 137

e) $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, U$ donc $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Par conséquent $F_x = -2a + b$.

2. Théorie — 3 points :

a) Enoncez le théorème du centre de masse pour un système de n points matériels.

b) Démontrez-le.

Solution 2:
Slide 140-141

Interro de Physique Générale – PHYS-F110
Exercices

Année 2021-2022 - Novembre 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **5 feuilles (4 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
5. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
6. Vous avez droit à un aide-mémoire.
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
9. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
10. Valeur numérique : Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Bon travail !

Q1	Q2	Q3	Q4
/2	/3	/4	/5

1. Exercice – 2 points :

La surface d'une étoile est animée d'un mouvement de vibration qui renseigne en particulier sur sa composition chimique. La fréquence de vibration d'une étoile dépend de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

a) Le rayon R de l'étoile

b) La masse M de l'étoile

c) La constante G de gravitation universelle.

Déterminer, par analyse dimensionnelle et à un facteur multiplicatif près, l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, M et G.

Solution 1:

Si k, a, b et c sont des constantes :

$$\begin{aligned} f &= kR^a M^b G^c \\ T^{-1} &= L^a M^b (L^3 T^{-2} M^{-1})^c \end{aligned}$$

En effet, on trouve les dimensions de G par la force gravitationnelle : comme $|\vec{F}| = Gm_1m_2/r^2$. On retrouve facilement (en utilisant $|\vec{F}| = ma$) que l'unité d'une force, le Newton, est donné en unités fondamentales par $[N] = MLT^{-2}$.

On a donc :

$MLT^{-2} = [G]M^2/L^2$

Donc :

$[G] = L^3T^{-2}M^{-1}$.

D'où, en identifiant les puissances des temps, longueurs et masses :

[T] : $-1 = -2c$

[L] : $0 = a + 3c$

[M] : $0 = b - c$

Par conséquent, $c = 1/2$, $b = 1/2$ et $a = -3/2$. Donc, si k est une constante sans dimension :

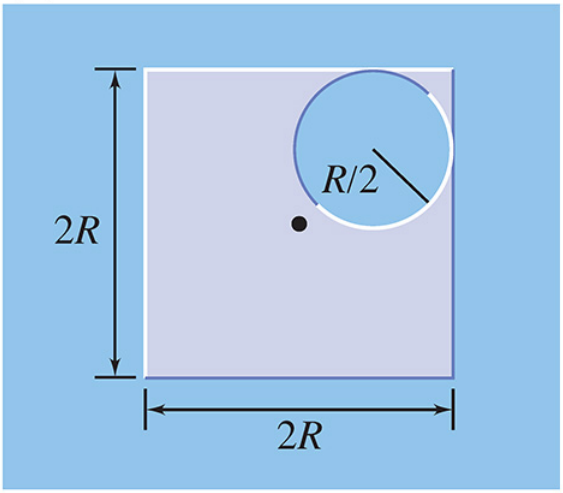
$$f = kR^{-3/2}M^{1/2}G^{1/2} = k\sqrt{\frac{MG}{R^3}}$$

2. Exercice – 3 points :

Un carré homogène de côté $2R$ est percé d'un trou circulaire de rayon $R/2$. Le centre du trou est situé en $(R/2, R/2)$ par rapport au centre du carré.

a) Exprimez la masse du carré troué en fonction de la masse surfacique σ et de R.

b) Trouvez la position du centre de masse par rapport au centre du carré pris comme origine des coordonnées.



Solution 2:

a) Le carré est homogène de masse surfacique σ.
Masse du carré plein : $m_1 = \sigma 4R^2$
On attribue au trou une masse surfacique négative. Ainsi, en superposant le carré plein de masse surfacique σ et un disque de masse surfacique opposée $-\sigma$, on obtient la forme voulue.
Masse du trou : $m_2 = -\sigma\pi R^2/4$
Masse du carré évidé : $m_1 + m_2 = \sigma R^2(4 - \pi/4)$.

b) L'énoncé nous propose de choisir l'origine du repère au centre de masse du carré plein. On choisit les axes (Ox) (resp., (Oy)) parallèles aux côtés horizontaux (resp., verticaux) du carré.
Le centre de masse du carré plein a pour coordonnées $x_1 = y_1 = 0$.
Le centre de masse du trou a pour coordonnées $x_2 = y_2 = R/2$.

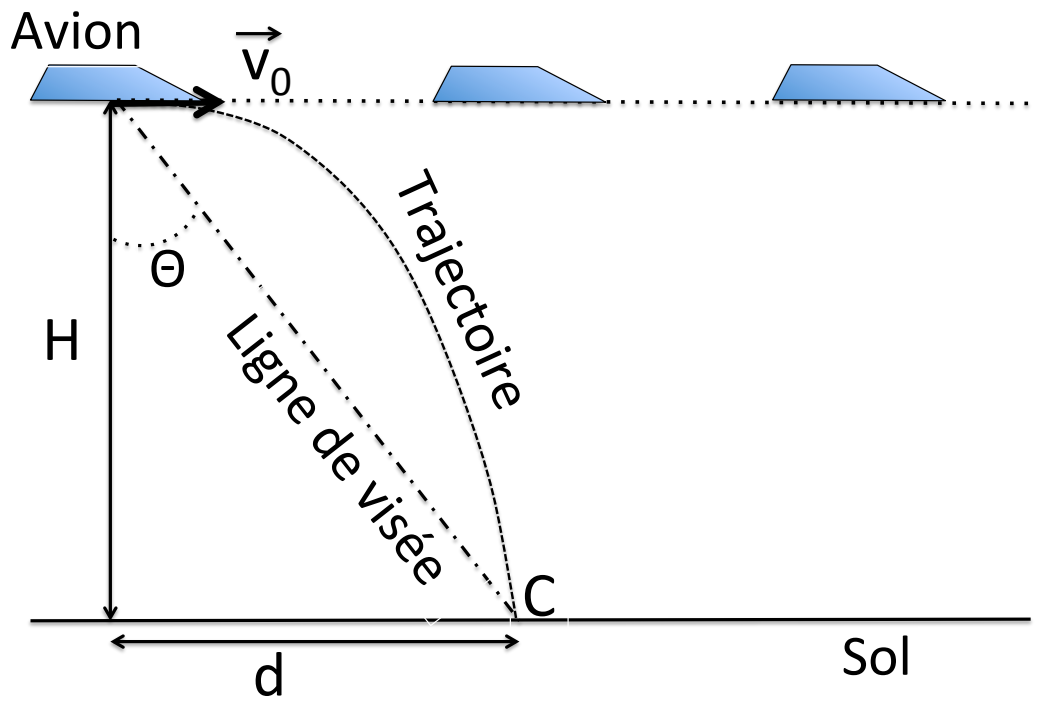
$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1 \times 0 + (-\sigma\pi R^2/4)(R/2)}{\sigma R^2(4 - \pi/4)} \\ &= -\frac{\pi R}{2(16 - \pi)} \\ &= -0.122R \end{aligned}$$

Par symétrie, $y_{CM} = -0.122R$.

3. Exercice – 4 points :
Un avion vole horizontalement à une altitude $H = 5.0$ km et veut larguer une boîte de vivres sur une cible C. Sa vitesse, constante, est de $v_0 = 500$ km/h. On néglige la résistance de l'air.

a) Déterminez l'angle θ (angle, mesuré à partir de la verticale, avec lequel le pilote voit la cible lorsqu'il ouvre la soute et laisse tomber la boîte ; voir figure).

b) La trajectoire de la boîte de vivres, vue de l'avion, apparaît-elle parabolique ? Expliquez.



Solution 3:

a) Référentiel : lié au sol, référentiel supposé inertiel.
Système : la boîte de vivres.
Forces : Force de pesanteur. On néglige les frottements, puisque l'énoncé ne les mentionne pas.
Repère : La situation se passe dans un plan vertical. On choisit une base orthonormée (Oxy). L'axe (Oy) est vertical, orienté positivement vers le haut et son origine est au niveau du sol. L'axe (Ox) est horizontal, orienté positivement vers la droite et son origine est l'abscisse à laquelle l'avion largue la boîte.
On applique au système la 2eme loi de Newton : $\vec{F} = m\vec{a}$. La seule force exercée sur la boîte est le poids $m\vec{g}$. On projette sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg \\ m\ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

En intégrant, et comme $v_{0y} = 0$ et $v_{0x} = v_0$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -gt + 0 \\ \dot{x} &= v_0 \end{aligned}$$

En intégrant, et comme $y_0 = H$ et $x_0 = 0$:

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + H \quad (1)$$
$$x = v_0 t \quad (2)$$

La boîte touche le sol quand $y = 0$. L'Eq. 1 nous indique que lorsque $y = 0$, on a $t = \sqrt{2H/g}$.
L'Eq. 2 donne qu'à cet instant, $x = v_0\sqrt{2H/g}$.
$\tan\theta = x/H = v_0\sqrt{2/gH}$. Donc $\theta = \arctan(v_0\sqrt{\frac{2}{gH}})$.
A.N. : $v_0 = 500$ km/h $= 500 \times 1000/3600$ m/s
$g = 9.81$ m s^{-2}
$H = 5000$ m
$\theta = \arctan(0.89) = 42°$

b) Vu de l'avion, le mouvement de la boîte apparaît comme un mouvement rectiligne uniformément accéléré (accélération g vers le bas). La trajectoire, vue de l'avion, n'est donc pas parabolique mais rectiligne. En effet, la composante selon (Ox) de la vitesse de la boîte, v_0, n'est pas apparente depuis l'avion puisque celui-ci se déplace dans la même direction à la même vitesse horizontale v_0.

4. Exercice – 5 points :

Un véhicule parcourt sans déraper, à vitesse constante v, une piste circulaire de rayon R relevée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. On note μ le coefficient de frottement statique entre les pneus du véhicule et la route.

a) Comment appelle-t-on le mouvement du véhicule ? Dans le cas d'un tel mouvement, caractérisez l'accélération $\vec{a}$ du véhicule (donnez sa direction, son sens, ainsi que son module en fonction des données de l'énoncé).

b) Expliquez pourquoi on doit considérer un coefficient de frottement statique et non cinétique (dynamique) entre les pneus du véhicule et la route.

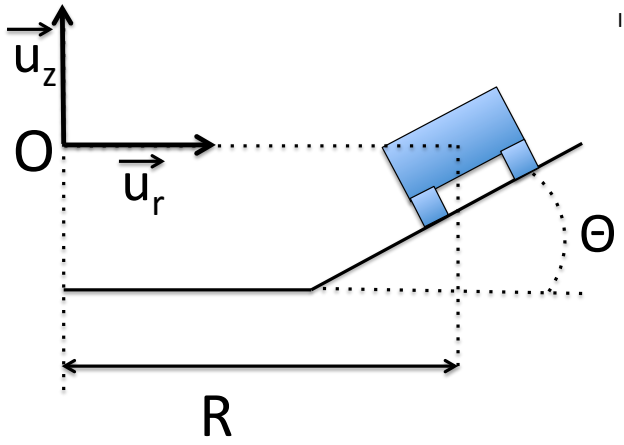
c) Décrivez et dessinez les forces s'exerçant sur le véhicule dans le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. On ne considérera qu'une unique force de frottement s'exerçant sur le véhicule (c'est la résultante des 4 forces de frottement s'exerçant sur les 4 pneus ; cette force empêche le véhicule de déraper vers l'extérieur du virage). Attention à la direction et surtout au sens cette force de frottement résultante lorsque vous la représentez.

d) Montrez que le module de la vitesse maximale possible pour que le véhicule ne dérape pas vers l'extérieur du virage est :

$$v_{\max} = \sqrt{R\ g\ \frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu \tan\theta}}$$



Image source: Daimler Global Media Site



Solution 4:

a) Le véhicule est en mouvement circulaire uniforme autour de l'axe (Oz). Son accélération est donc normale (perpendiculaire à la trajectoire circulaire), dirigée horizontalement vers le centre de la piste circulaire, et son module vaut $|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$. On a donc $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$.

b) Le véhicule roule sans déraper, il n'y a donc pas de glissement.

Expliquons d'abord le roulement sans glissement dans le cas d'un véhicule suivant une trajectoire rectiligne avec une force de frottement qui est donc opposée à la vitesse. Si on considère un pneu, chaque point P_P du pneu roule sans glisser par rapport à la route, il n'est en contact qu'un court instant avec un point P_R de la route, ensuite c'est le point suivant de la circonférence du pneu $P_{P'}$ qui sera en contact avec le point $P_{R'}$ de la route. Donc la vitesse de P_P par rapport à P_R est nulle à chaque instant. (Dans ce raisonnement, on a considéré le pneu parfaitement circulaire, de manière à ce qu'il n'y ait qu'un point tangent à la route, en donc en contact avec elle, à chaque instant. En pratique, le pneu s'écrase un peu, mais la vitesse entre les points du pneu en contact avec la route et la route elle-même reste nulle de toute façon).

Considérons maintenant la situation de l'exercice. Le véhicule risque de déraper radialement, vers l'extérieur du virage, si sa vitesse est trop importante. Tant qu'il ne dérape pas radialement, c'est que, comme précédemment, la vitesse de chaque point du pneu en contact avec la route est nulle par rapport à la route elle-même.

Le frottement statique est le frottement qui s'exerce entre deux objets qui ne glissent pas (qui n'ont pas de vitesse) l'un par rapport à l'autre, c'est donc celui-là qu'il faut considérer.

c) Référentiel : du circuit, supposé inertiel.
Système : le véhicule.
Force s'exerçant dans le plan $(0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$:

- le poids du véhicule : $\vec{P} = -mg\ \vec{u}_z$
- la réaction normale de la route sur le véhicule : $\vec{N} = -N\sin\theta\ \vec{u}_r + N\cos\theta\ \vec{u}_z$
- la résultante des forces de frottements statiques, parallèle à la route, dirigée vers le bas : $\vec{F}_{fs} = -F_{fs}\cos\theta\ \vec{u}_r - F_{fs}\sin\theta\ \vec{u}_z$ Cette résultante de frottement est dirigée vers le bas car elle empêche la voiture de déraper vers l'extérieur.

(N.B. : Par ailleurs, il doit aussi exister des frottements opposés à la vitesse, pour que la voiture avance, mais ils sont perpendiculaires au plan $(0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$, donc on ne les demandait pas).

En projetant la 2eme loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ sur l'axe horizontal (la seule accélération est normale) :

$$-N\sin\theta - F_{fs}\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

En projetant la 2eme loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ sur l'axe vertical (l'accélération verticale est nulle) :

$$N\cos\theta - F_{fs}\sin\theta - mg = 0$$

La force de frottement statique s'exprime comme $F_{fs} \leq \mu N$. A la limite du dérapage, cette force atteint sa valeur maximale et on a donc $F_{fs} = \mu N$ lorsque $v = v_{\max}$. Les deux équations précédentes deviennent donc :

$$\begin{aligned} -N\sin\theta - \mu N\cos\theta &= -m\frac{v_{\max}^2}{R} \\ N\cos\theta - \mu N\sin\theta - mg &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} N(\sin\theta + \mu\cos\theta) &= m\frac{v_{\max}^2}{R} \\ N(\cos\theta - \mu\sin\theta) &= mg \end{aligned}$$

En divisant la première équation par la seconde et en simplifiant le terme de gauche par $N\cos\theta$ en haut et en bas (on suppose donc que $\theta \neq \pi/2$) :

$$\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta} = \frac{v_{\max}^2}{Rg}$$

D'où :

$$v_{\max} = \sqrt{Rg\frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}}$$

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Partie Théorie

Année 2021-2022 - Examen de janvier 2022

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **4 feuilles (3 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
7. Vous n'avez droit ni à un aide-mémoire ni à une calculatrice.
8. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
11. Cette partie Théorie de l'examen dure **50 minutes**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3
/4	/3	/3

1. Toutes sections — 4 points :

a) Enoncez la première et la deuxième loi de Newton. Définissez bien vos notations.

b) Donnez l'expression de la loi de la gravitation universelle (la force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles). Définissez bien vos notations et faites un schéma.

c) Considérez un satellite de masse m en orbite circulaire (de rayon r et de période orbitale T) autour de la Terre de masse M. Par analyse dimensionnelle, trouvez la relation $r = f(T, G, M)$ à un facteur multiplicatif près. Détaillez chaque étape de votre raisonnement.

d) En considérant toujours ce satellite en orbite circulaire, exprimez la vitesse v du satellite en utilisant la deuxième loi de Newton. En déduire la troisième loi de Kepler.

Solution 1:

Slides 67, 68, 73, 88

Analyse dimensionnelle :

Si C est une constante, on recherche :

$$\begin{aligned} r &= CM^a G^b T^c \\ L &= M^a \left(L^3 T^{-2} M^{-1}\right)^b T^c \end{aligned}$$

où on a trouvé les unités de G par la loi de la gravitation universelle : $[G]$ =N m^2 kg^{-2} donc en exprimant les Newton en unités SI, on a : $[G]$ = (kg m s^{-2}) m^2 kg^{-2} = m^3 s^{-2} kg^{-1} = $L^3T^{-2}M^{-1}$.

On a donc un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} 1 &= 3b \\ 0 &= a - b \\ 0 &= -2b + c \end{aligned}$$

On trouve $a = b = 1/3$ et $c = 2/3$. Donc $r = CM^{1/3}T^{2/3}G^{1/3}$, avec C une constante sans dimensions.

2. Toutes sections — 3 points :

On veut démontrer le deuxième théorème de König, qui permet de calculer l'expression de l'énergie cinétique d'un système de particules.

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel d'origine O. On considère un système $\mathcal{S}$ de N points matériels de masses m_i, $1 \leq i \leq N$. Les positions des points matériels dans $\mathcal{R}$ pourront être notées $\vec{r_i}$ et leurs vitesses $\vec{v_i}$.

a) Enoncez le deuxième théorème de König.

b) Démontrez-le, en définissant bien les symboles utilisés.

c) Supposez que le référentiel inertiel est un repère lié aux étoiles du voisinage solaire (c'est-à-dire proches du Soleil) et que le système $\mathcal{S}$ considéré est la Terre. Expliquez qualitativement, dans ce cas, quelles sont les contributions à l'énergie cinétique totale de la Terre.

Solution 2:

Slides 154

c : Energie cinétique du centre de masse de la Terre, due à la rotation de la Terre autour du Soleil, et énergie cinétique relative due à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Comme on supposé que le référentiel lié aux étoiles proches (et donc qui tourne très lentement, avec ces étoiles proches, autour du centre galactique) était inertiel, on n'a pas besoin de considérer l'énergie cinétique de rotation du Soleil autour du centre galactique.

3. Attention, barrez les questions qui ne vous concernent pas :

Math-Bio : — 3 points

a) Expliquez ce qu'est la vitesse de libération.

b) En considérant une fusée qui décolle de la Terre, et en supposant la conservation de son énergie mécanique, démontrez l'expression de la vitesse de libération de la fusée.

Chim et Poly — 3 points

a) Enoncez le principe d'Archimède.

b) Soit un corps solide de volume V_S et de masse volumique ρ_S totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur. Quelle est la résultante des forces extérieures $\vec{F_{\text{ext}}}$ exercées sur le solide (en fonction des données de l'énoncé) ?

c) Quelle est la condition de flottaison (pour que le solide monte vers la surface) ? Justifiez.

d) On suppose que le solide flotte ; quel est le volume du solide qui est immergé (dans le fluide) V_F ? Justifiez.

Phys et Math-Phys — 3 points

On suppose que deux ondes sinusoïdales, notées $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$, de même amplitude A et de pulsation légèrement différentes ω_1 et ω_2, se propagent dans le même sens. On prendra comme conditions initiales $y_1(0,0) = y_2(0,0) = 0$.

a) Donnez l'expression de $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$.

b) Décrivez qualitativement ce qui se produit en un point fixe de l'espace lorsque ces deux ondes se superposent. Comment s'appelle le phénomène observé ?

c) Décrivez mathématiquement ce phénomène.

Solution 3:

Math-Bio : Slides 138
Chim et Poly : Slides 275, 277
Phys et Math-Phys : Slides 399, 400

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Exercices

Année 2021-2022 - Janvier 2022

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Phys — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Déposez votre carte d'étudiant sur votre table pour la prise des présences.
3. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles (5 questions)**.
4. **Barrez immédiatement les questions qui ne concernent pas votre section**.
5. Ne dégrafez pas les pages.
6. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
7. Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.
8. Vous avez droit à un aide-mémoire.
9. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
10. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
11. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
12. Cette partie Exercices de l'examen dure **2h10**.

Bon travail !

Q1	Q2 - Math-Bio	Q3	Q4 - Tous sauf Math-Bio	Q5 - Phys, Math-Phys
/5	/4	/4	/4	/2

1. Exercice – Tous – 5 points :

Une bille sphérique homogène de masse m et de rayon r roule sans glisser depuis le sommet A d'un hémisphère de rayon R. On suppose la vitesse initiale négligeable. Elle décolle de la sphère en B ; l'angle θ (= angle entre OA et OB) vaut alors θ_B.

On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

a) Détaillez les forces agissant sur la bille lorsqu'elle se trouve entre A et B et représentez-les sur le schéma (ou un schéma séparé, au choix).

b) Détaillez les forces agissant sur la bille lorsqu'elle se trouve en B et représentez-les sur un schéma séparé.

c) Quel type de mouvement le centre de masse de la bille suit-il entre A et B ?

d) En appliquant la 2ème loi de Newton que vous projetterez sur un axe adéquat, donnez l'expression de la vitesse v_B du centre de masse de la bille en B (quand la bille décolle) en fonction, en particulier, de l'angle θ_B.

e) Donnez l'expression de l'énergie mécanique en A.

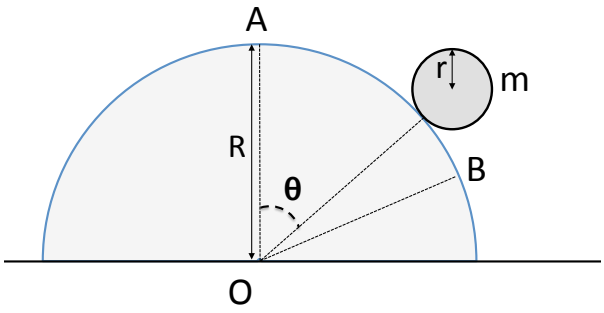
f) Donnez l'expression de l'énergie mécanique en B.

g) Le frottement entre la bille et la sphère est-il statique ou cinétique ? La force de frottement entre la bille et la sphère effectue-t-elle un travail ? Justifiez. Que peut-on en déduire quant à la conservation de l'énergie mécanique entre A et B ?

h) En déduire la valeur numérique de l'angle θ_B.

i) Donnez l'expression de v_B, la vitesse du centre de masse de la bille, quand celle-ci quitte la sphère, en fonction (de certaines) des données de l'énoncé : m, r, R, g.

Donnée : Moment d'inertie d'une sphère de masse m et de rayon r par rapport à son centre de masse : $I = \frac{2}{5}mr^2$.



Solution 1:

a) $m\vec{g}$, appliqué au centre de masse de la bille, vertical, orienté vers le bas.
$\vec{N}$, réaction de l'hémisphère sur la bille, appliquée au point de contact sphère-bille, dirigée selon la droite joignant le centre de la sphère au centre de la bille, orientée vers le haut.
$\vec{F_{\text{frott}}}$, force de frottement statique, tangente à la bille au point de contact avec l'hémisphère, orientée vers le haut.

b) $m\vec{g}$

c) Le centre de masse suit un mouvement circulaire accéléré.

d) En projetant la 2eme loi de Newton sur la droite joignant les centres des deux sphères, et orientée positivement vers O :

$$m\frac{v^2}{R+r} = mg\cos\theta - N$$

En B la bille décolle, $\vec{N} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} m\frac{v_B^2}{R+r} &= mg\cos\theta_B \\ v_B &= \sqrt{(R+r)g\cos\theta_B} \end{aligned}$$

e) En A : $E_m = E_c + E_p = 0 + mg(R+r)$

f) On note ω la vitesse angulaire de la bille. Attention à ne pas oublier l'énergie cinétique de rotation.
En B : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(R+r)\cos\theta_B$.

g) Roulement sans glissement donc frottement statique ; le point d'application de la force de frottement ne se déplace pas ; donc cette force n'effectue pas de travail. L'énergie mécanique est donc conservée entre A et B.

h) Comme on a un roulement sans glissement, on a $v = \omega r$.
Comme $I = \frac{2}{5}mr^2$,

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}r^2\omega^2 + mg(R+r)\cos\theta_B \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 + mg(R+r)\cos\theta_B \\ &= \frac{7}{10}mv^2 + mg(R+r)\cos\theta_B \end{aligned}$$

Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{7}{10}mv^2 = mg(R+r)(1-\cos\theta_B)$$

En éliminant v^2 :

$$\begin{aligned} \frac{10}{7}(1-\cos\theta_B) &= \cos\theta_B \\ \cos\theta_B &= \frac{10}{17} \end{aligned}$$

Donc $\theta_B = 54°$.

i) $v_B = \sqrt{\frac{10}{7}g(R+r)}$

2. Exercice – Uniquement Math-Bio - 4 points :

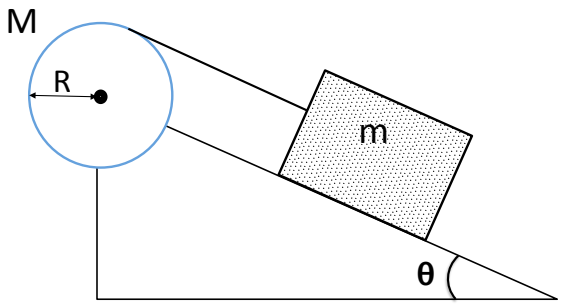
Un bloc de masse m peut glisser sans frottement vers le bas d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Il est relié par une corde inextensible à une poulie de masse M et de rayon R, assimilable à un disque. La corde ne glisse pas sur la poulie lorsque la poulie tourne.

a) Représentez les forces agissant sur le bloc ; précisez leur point d'application.

b) Quelle est la relation entre l'accélération angulaire de la poulie et l'accélération linéaire du bloc ?

c) Déterminer l'accélération angulaire de la poulie en fonction (de certaines) des données de l'énoncé : θ, m, M, R, g.

Remarque : le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon R est $\frac{1}{2}MR^2$.



Solution 2:

a) $m\vec{g}$, appliquée au centre de masse du bloc, vers le bas.
La réaction $\vec{N}$ du plan incliné, appliquée à l'interface plan/bloc, perpendiculaire au plan, vers le haut.
Le tension dans la corde $\vec{T}$, appliquée au point d'attache de la corde sur le bloc, le long de la corde, vers le haut.

b) Comme la corde ne glisse pas, on a : $a_y = R\gamma$, a_y accélération linéaire, γ accélération angulaire.

c) 2eme loi de Newton appliquée au bloc, projetée sur l'axe (Oy) le long du plan incliné, orienté vers le bas :

$$mg\sin\theta - T = ma_y$$

Théorème du moment cinétique appliqué à la poulie, par rapport au centre de masse de la poulie :

$$RT = 1/2MR^2\gamma$$

En éliminant T entre ces deux équations :

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - 1/2Ma_y &= ma_y \\ a_y &= \tfrac{m}{m+M/2}g\sin\theta \\ \gamma &= \tfrac{m}{m+M/2}\tfrac{g}{R}\sin\theta \end{aligned}$$

3. Exercice – Tous – 4 points :

Une balle de fusil de masse m est tirée verticalement avec une vitesse v vers un bloc de bois de masse M, initialement au repos et situé juste au-dessus. On suppose que la balle heurte le bloc à la vitesse v (on néglige la distance entre le fusil et le bloc de bois).

Calculez h, la hauteur maximale atteinte par le bloc de bois lorsque la balle se sera encastrée dedans. On suppose pour simplifier que la balle s'immobilise instantanément dès qu'elle s'est encastrée sur la face inférieure du bloc.

Si certaines quantités physiques sont conservées, on expliquera systématiquement lesquelles, et pourquoi.

Solution 3:

Il faut procéder en deux temps :

a) Collision totalement inélastique. Conservation de la quantité de mouvement, projetée sur un axe vertical :
$mv = (m + M)v'$

b) Conservation de l'énergie mécanique entre l'instant juste après le choc et le moment où le bloc atteint sa hauteur maximale :

$$\begin{aligned} 1/2(m+M)v'^2 + 0 &= 0 + (m+M)gh \\ v' &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

donc

$$h = \frac{1}{2g}(\frac{m}{m+M}v)^2$$

4. Exercice – Tous sauf Math-Bio - 4 points :

Le diamètre d'un jet d'eau (de masse volumique ρ constante) s'écoulant d'un robinet diminue au fur et à mesure de sa chute. Considérons le point A (quand l'eau sort du robinet) et le point B (position la plus basse). Soient :

— d_A et d_B les diamètres du jet en A et en B

— v_A et v_B les vitesses d'écoulement en A et en B

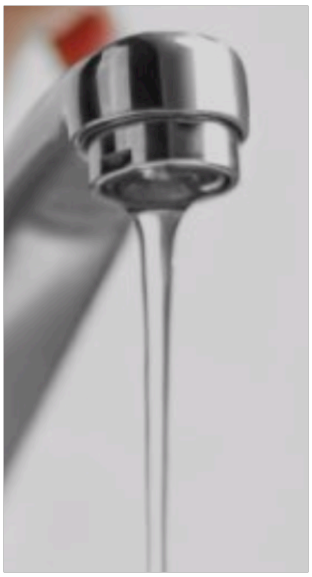
— h la hauteur du jet

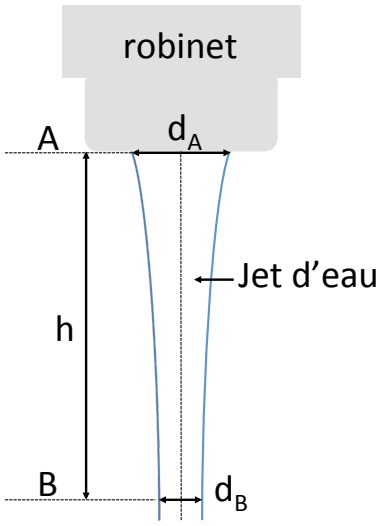
— g l'accélération de la gravité

a) Ecrivez l'équation de continuité entre les points A et B, en fonction des données de l'énoncé. Vous préciserez les éventuelles hypothèses.

b) Exprimez le rapport d_B/d_A en fonction de v_A, h et g.
Justifiez bien les éventuelles hypothèses et simplifications.
Commentez : le résultat (concernant d_B/d_A) est-il qualitativement conforme à l'observation ?

c) Quelle(s) hypothèse(s) risquent de ne pas être entièrement vérifiées en pratique ?





Solution 4:

a) L'équation de continuité donne :

$$\rho_A v_A \pi (\frac{d_A}{2})^2 = \rho_B v_B \pi (\frac{d_B}{2})^2$$

Comme $\rho_A = \rho_B = \rho$, on a :

$$v_B = v_A (\frac{d_A}{d_B})^2$$

b) Le théorème de Bernouilli nécessite de faire les hypothèses suivantes, qu'on suppose d'application :

— Le fluide est incompressible ($\rho = \text{cte}$)

— Ecoulement stationnaire

— Ecoulement laminaire

— Fluide parfait (non visqueux, donc pas de frottements, donc conservation de l'énergie mécanique)

$$p_A + 1/2\rho v_A^2 + \rho g h = p_B + 1/2\rho v_B^2 + 0$$

Le jet est à l'air libre donc $p_A = p_B = p_{\text{atm}}$.

$$\begin{aligned} v_A^2 + 2gh &= v_A^2(\tfrac{d_A}{d_B})^2 \\ \frac{d_B}{d_A} &= \left(\tfrac{v_A^2}{v_A^2+2gh}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Plus h augmente, plus $d_B < d_A$ donc le jet s'amincit.

c) L'écoulement peut présenter une certaine viscosité. L'écoulement pourrait devenir turbulent et donc ne plus être laminaire à partir d'une certaine hauteur de chute. En pratique, il se trouve qu'avant même d'atteindre cette turbulence, l'écoulement devient tellement mince que des effets de tension de surface à l'interface eau/air (instabilités de Rayleigh) déstabilisent l'écoulement et le séparent en gouttelettes. En effet, lorsque le jet s'amincit, la surface par élément de volume augmente, ce qui coûte de l'énergie. Finalement, la solution la moins "énergivore" est de séparer l'écoulement en gouttelettes.

5. Exercice – Uniquement Physique et Math-physique – 2 points :

Une masse m, suspendue à un ressort de constante de raideur k, peut :

— soit osciller verticalement (avec la période T_{v})

— soit osciller latéralement, à la manière d'un pendule (avec la période T_{p})

mais on suppose qu'elle ne fait pas les deux à la fois.

On se place, dans tous les cas, dans le régime des oscillations de faible amplitude.

Soit ℓ_{eq} la longueur du ressort lorsque la masse y est attachée et qu'elle est au repos. Soit ℓ_0 la longueur à vide du ressort et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

a) Exprimez ℓ_{eq} en fonction de ℓ_0 et des données de l'énoncé.

b) Par analyse dimensionnelle, exprimer (à un facteur multiplicatif près) T_{v} en fonction de la masse m et de la constante de raideur k.

c) Par analyse dimensionnelle, exprimer (à un facteur multiplicatif près) T_{p} en fonction de la longueur du pendule et de g.

d) En supposant que les deux facteurs multiplicatifs précédents sont égaux, calculez $T_{\mathrm{p}}/T_{\mathrm{v}}$. Quelle période d'oscillation est la plus longue ?

Solution 5:

a) A l'équilibre :

$$\begin{aligned} mg &= k(l_{\mathrm{eq}} - l_0) \\ l_{\mathrm{eq}} &= l_0 + mg/k \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{v}} &= m^a k^b \\ s^1 &= kg^a (kg\ s^{-2})^b \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \\ 1 &= -2b \end{aligned}$$

Donc $b = -1/2$ et $a = 1/2$. Donc (si C_1 est une constante) :

$$T_{\mathrm{v}} = C_1 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

c)

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{p}} &= L^a g^b \\ s^1 &= m^a (m s^{-2})^b \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \\ 1 &= -2b \end{aligned}$$

Donc $b = -1/2$ et $a = 1/2$. Donc (si C_2 est une constante) :

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{p}} &= C_2 \sqrt{\frac{L}{g}} \\ &= C_2 \sqrt{\frac{l_0 + mg/k}{g}} \end{aligned}$$

d) Donc comme $C_1 = C_2 (= 2\pi)$: $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{l_0/g+m/k}{m/k}} = \sqrt{1+\frac{l_0 k}{mg}} > 1$
Donc $T_\mathrm{p} > T_\mathrm{v}$.

Biol-F102 / 5 crédits

Tu auras ce cours pendant le Q2. La matière ne te sera normalement pas trop inconnue. Tu rentreras juste plus dans les détails de ce que tu as sûrement dû voir en secondaire. Quoi qu'il en soit, tu reverras toutes les bases dans les premiers cours pour que tout le monde soit au même niveau.

Essentiellement, tu auras des cours théoriques assez conséquents donc essaie de bien t'y prendre à l'avance avant l'exam parce que ça fait beaucoup de notions à retenir ! En fin de Q2, il y aura quelques séances d'exercices en génétique. Les exercices ne sont pas trop compliqués mais si tu n'es pas sûr.e d'avoir tout assimilé, essaie d'aller aux séances d'exos. Les slides sont super complètes et tu peux aussi te procurer un syllabus.

Pendant l'année, tu auras la possibilité de lire un livre et d'en faire une critique. Ce rapport peut te faire gagner jusqu'à 2 points bonus ! Donc un conseil, fonce car ça ne prend normalement pas trop de temps :) Surtout que si tu ne le fais pas, tu perdras 2 points sur ta note finale.

L'examen sera un oral : 2 questions principales te seront posées. Tu commences par répondre à ces deux questions puis au fur et à mesure, le prof t'en posera d'autres plus petites, ce qui finira en une sorte de discussion. Le prof est assez exigeant donc essaie de montrer que tu es sûr.e de toi, en disant un maximum de choses complètes et précises (et justes si possible). No stress si t'as un trou, il essaie de te mettre sur la bonne voie pour t'aider autant que possible. Et il essaie de faire des critiques constructives pour toujours t'améliorer plus.

Questions examen oral :

- Différence entre une cellule végétale et une cellule animale
- Points communs entre une mitochondrie et un chloroplaste
- Qu'est-ce que le code génétique ?
- Où/Comment se passe la synthèse des protéines ?
- Qu'est-ce qu'un codon ?
- Le mécanisme de reproduction du virus
- Réplication de l'ADN bactérien.
- Loi de Hardy-Weinberg.
- Différences et similitudes mitose/méiose.
- Expliquez le travail cellulaire, son fonctionnement et donnez des exemples.
- Qu'est-ce que le patrimoine génétique ? Par quoi se caractérise-t-il ?
- Qu'est-ce que la membrane plasmique ?
- Décrivez la structure de l'ADN et expliquez sa relation avec l'information génétique.
- Cycle lytique et lysogénique.
- Qu'est-ce que l'osmose, pression et potentiel osmotique ?
- Comparez le mode de transmission des gènes liés au sexe et l'hérédité maternelle.
- Expliquez la photosynthèse.
- Quelles sont les caractéristiques entraînant la diversité chez les individus à reproduction sexuée ?
- La composition du réseau intracellulaire de membranes et leur fonction.
- Quels sont les éléments qui constituent le cytosquelette ? Définissez les fonctions spécifiques de ces constituants. Parlez des liens entre les filaments intermédiaires et la matrice extracellulaire.
- Expliquez, dans la cellule animale, les éléments qui permettent à une cellule de faire partie intégrante d'un tissu.
- Expliquez la respiration cellulaire aérobie.
- Qu'est-ce qu'une enzyme, quel est son fonctionnement, les conditions physicochimiques ontelles une influence sur leur activité ?

• Y a-t-il recombinaison des gènes lors de la méiose ? Si oui, à quel moment se déroule-t-elle ?

• Qu’est-ce qu’une protéine ? Donnez des exemples de fonctions.

• Expliquez les 2 lois de Mendel.

• Expliquez les propriétés principales de l'eau

• Qu’est-ce que le code génétique ?

• La variation génétique chez les procaryote

• Comparez le mode de transmission des gènes liés au sexe et l’hérédité maternelle

• Expliquez la loi mendélienne des assortiments indépendants de caractères mais également de sa première loi.

• Expliquez le lien entre le génotype et le phénotype. Définir Epistasie, Hérédité polygénique (expliquer). Qui est le plus important entre la génétique et l’environnement

• Expliquez, lors d’une fécondation sexuée, les différents processus de variation génétique et développer. Expliquer les différentes mutations

• Expliquez le travail cellulaire, son fonctionnement et donner des exemples

• De quoi est composé le réseau intracellulaire de membranes et quelles sont leurs fonctions ?

• Qu’est-ce que l’assortiment indépendant des caractères? Qu’est-ce qu’une liaison génétique? Y a-t-il recombinaison des gènes lors de la méiose? Si oui, à quel moment se déroule-t-elle?